

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
"СЕВАСТОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ИНСТИТУТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И УПРАВЛЕНИЯ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Кафедра "Информатика и управления в технических системах"

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Методические указания
к выполнению лабораторных работ
для студентов направления подготовки
27.03.04 – Управление в технических системах



Севастополь
СевГУ
2021

УДК 681.513.5:004.9 (076)

ББК 32.965.09

О-62

Р е ц е н з е н т:

А.А. Кабанов – заведующий кафедрой "Информатика и управление в технических системах", канд. техн. наук, доцент

Составитель: В.А. Карапетьян

О-62 Оптимальные системы управления. Лабораторный практикум по дисциплине : методические указания к выполнению лабораторных работ для студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах / Севастопольский государственный университет, институт информационных технологий и управления в технических системах, кафедра "Информатика и управления в технических системах"; сост. В.А. Карапетьян. – Севастополь: СевГУ, 2021. – 48. – Текст: электронный.

Целью лабораторного практикума является развитие у студентов навыков самостоятельного исследования и решения задач линейно-квадратичной оптимизации, использования современных специализированных программных средств проектирования оптимальных систем управления динамическими объектами и процессами.

Методические указания предназначены для студентов направления подготовки 27.03.04 – Управление в технических системах.

УДК 681.513.5:004.9 (076)

ББК 32.965.09

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры "Информатика и управления в технических системах", протокол № 7 от 23 марта 2021 г.

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к изданию на заседании ученого совета института "Информационные технологии и управление в технических системах", протокол № 5 от 15 апреля 2021 г.

Изд. № 166/2021. Объем 3 п.л.

РИИЦМ ФГАОУ ВО "Севастопольский государственный университет"

© Карапетьян В.А., 2021

© ФГАОУ ВО «Севастопольский
государственный университет», 2021

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ СРЕДЫ MATLAB ДЛЯ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ЛСС	5
1.1 Цель работы	5
1.2 Краткие теоретические сведения	5
1.3 Программа и порядок выполнения работы	11
1.4 Содержание отчёта и порядок защиты работы	13
1.5 Контрольные вопросы	13
2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ	14
2.1 Цель работы	14
2.2 Краткие теоретические сведения	14
2.3 Модели объектов управления	18
2.4 Задание на работу	19
2.5 Необходимые сведения для выполнения задания.....	20
2.6 Содержание отчёта и порядок защиты работы	20
2.7 Контрольные вопросы	20
3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ САУ	21
3.1 Цель работы	21
3.2 Объект исследования.....	21
3.3 Краткие теоретические сведения	22
3.4 Задание на работу	24
3.5 Необходимые сведения для выполнения задания.....	24
3.6 Содержание отчёта и порядок защиты работы	26
3.7 Контрольные вопросы	26
4 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ СОСТОЯНИЯ	27
4.1 Цель работы	27
4.2 Краткие теоретические сведения	27
4.3 Объект исследования.....	28
4.4 Необходимые сведения из Matlab.....	29
4.5 Задание на работу	30
4.6 Содержание отчёта и порядок защиты работы	31
4.7 Контрольные вопросы	31

5 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ ВЫХОДА И МОДАЛЬНЫМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ	32
5.1 Цель работы	32
5.2 Краткие теоретические сведения	32
5.3 Объект исследования	35
5.4 Необходимые сведения из Matlab	36
5.5 Задание на работу.....	37
5.6 Содержание отчёта и порядок защиты работы.....	38
5.7 Контрольные вопросы.....	39
6 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6. ИССЛЕДОВАНИЕ САУ С ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИМ СТОХАСТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ	40
6.1 Цель работы	40
6.2 Краткие теоретические сведения	40
6.3 Объект управления	42
6.4 Необходимые сведения из Matlab	43
6.5 Порядок выполнения работы	45
6.6 Содержание отчета и порядок защиты работы.....	46
6.7 Контрольные вопросы.....	47
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	48

ВВЕДЕНИЕ

Лабораторный практикум включает шесть лабораторных работ и охватывает основные разделы дисциплины "Оптимальные системы управления".

Цель первых трёх работ – обеспечить необходимый уровень знаний и умений для успешного решения задач линейно-квадратической оптимизации (ЛКО). В этих работах рассматриваются вопросы: формирования квадратичских форм, их знакоопределённости, специфических свойств вещественных симметрических матриц; управляемости, наблюдаемости и канонических представлений линейных стационарных систем (ЛСС); модального синтеза регуляторов и наблюдателей состояния.

В четвёртой и пятой работах исследуются задачи ЛКО в детерминированной постановке: основная задача ЛКО – синтез линейно-квадратического регулятора состояния (ЛКР, LQR); синтез ЛКР выхода и модального наблюдателя состояния полного порядка.

В шестой работе решаются задачи ЛКО в стохастической постановке – синтез ЛКР выхода и фильтра Калмана – ЛК гауссов регулятор, LQG-регулятор.

Решения задач практикума проводятся средствами среды Matlab/Simulink.

1 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1. ПРИМЕНЕНИЕ СРЕДСТВ СРЕДЫ МАТЛАВ ДЛЯ АНАЛИЗА СВОЙСТВ ЛСС

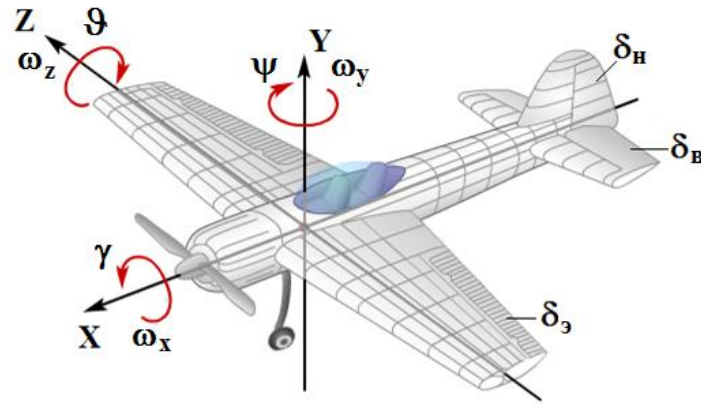
1.1 Цель работы

Реализация алгоритмов матричных и полиномиальных операций функциями стандартных и специальных математических библиотек Matlab, изучение операторов управления вычислительным процессом и применение этих средств к задачам анализа систем автоматического управления. Приобретение профессиональных навыков программирования в системе Matlab.

1.2 Краткие теоретические сведения

1.2.1. Объект исследования

Рассматривается задача управления движением самолёта (летательного аппарата ЛА). На рисунке 1.1 изображены схема ЛА, оси координат, обозначены переменные движения и управления.



X, Y, Z – координатные оси;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – угловые скорости (крена, тангажа, рыскания);

$\delta_\delta, \delta_{\delta_v}, \delta_{\delta_n}$ – углы отклонения элеронов, рулей высоты и направления.

γ – угол крена;

θ – угол тангажа;

ψ – угол рыскания;

Рисунок 1.1 – Схема ЛА, переменные движения и управления

Положим, что невозмущённое движение ЛА осуществляется с постоянной скоростью, на постоянной высоте и постоянном курсе, с нулевым креном. В этом случае говорят, что ЛА совершает полёт в установившихся горизонтальном и боковом режимах. Далее будем рассматривать слабозмущённое движение ЛА, т.е. движение ЛА, мало отклоняющегося от установившегося. Математические модели слабозмущённого движения формируют на основе процедуры линеаризации нелинейных моделей движения в малых окрестностях номинальных (заданных) траекторий. Для ЛА выберем в качестве линейных моделей слабозмущённого движения – модели в пространстве состояний $[1 \div 4]$ вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad (1.1)$$

$$y(t) = C \cdot x(t). \quad (1.2)$$

Уравнение (1.1) называют уравнением состояния, соотношение (1.2) – уравнением выходов. Вектор-функции $x \in \mathbf{R}^n$, $u \in \mathbf{R}^m$ и $y \in \mathbf{R}^p$ представляют, соответственно, состояние, управление и выход линеаризованной модели объекта управления. Компоненты векторов x , u и y описывают отклонения во времени текущих координат состояния, управления и выходов от номинального (заданного) поведения. Числовые матрицы $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbf{R}^{n \times m}$ и $C \in \mathbf{R}^{p \times n}$ являются матрицами динамических коэффициентов, управления и выходов.

Далее, в качестве конкретных числовых примеров линейных моделей ЛА слабозмущённых продольного и бокового движений, выберем две модели движения самолёта, приведённые в [5]:

– линейную модель движения ЛА в вертикальной плоскости (продольное движение – *longitudinal motion*):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \vartheta \\ \omega_z \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.86 & 0.86 & 0 & 0.61 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4.85 & -4.85 & -0.777 & 0.12 \cdot 10^{-4} \\ 257 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \vartheta \\ \omega_z \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0268 \\ 0 \\ -1.625 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\delta_\epsilon], \quad (1.3)$$

где θ – угол наклона траектории;

ϑ – угол тангажа;

ω_z – угловая скорость тангажа;

h – отклонение по высоте полёта;

δ_ϵ – угол отклонения руля высоты;

– линейную модель движения ЛА в горизонтальной плоскости с учётом крена (боковое движение – *lateral motion*):

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi \\ \omega_y \\ \gamma \\ \omega_x \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.098 & 0 & 0.038 & -0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.089 & 0 & -1.52 & -3.4 \\ 0 & 1 & 0.38 & 0.11 & -0.09 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi \\ \omega_y \\ \gamma \\ \omega_x \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.63 & 0.16 \\ 0 & 0 \\ 0.9 & -2.3 \\ -0.016 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_\eta \\ \delta_\zeta \end{bmatrix}, \quad (1.4)$$

где ψ – угол курса (рыскания);

γ – угол крена;

β – угол скольжения;

ω_y и ω_x – угловые скорости рыскания и крена;

δ_η и δ_ζ – углы отклонения руля направления и элеронов.

В моделях время измеряется в секундах, углы – в радианах, угловые скорости – в радианах в секунду, длина – в метрах.

В уравнениях состояния (1.3) и (1.4) компонентами векторов состояния и управления выступают малые возмущения (отклонения) номинальных значений переменных состояния установившегося режима движения ЛА. Однако, ради сокращения записи, для обозначения этих отклонений будем использовать те же символы, что и на рисунке 1.1, т.е., вектор состояния для модели продольного движения представляет собой набор компонент $[\theta \ \vartheta \ \omega_z \ h]^T$, а для бокового движения – $[\psi \ \omega_y \ \gamma \ \omega_x \ \beta]^T$. Управляющие воздействия представлены векторами $[\delta_\epsilon]$ и $[\delta_\eta \ \delta_\zeta]^T$ соответственно.

Современные самолёты снабжаются устройствами управления, называемыми автоматами стабилизации, или автопилотами. Применительно к рассматриваемым задачам автопилоты, вырабатывая управляющие воздействия δ_ϵ (на руль высоты) и δ_η (на руль направления), а также δ_ζ (на элероны), удерживают все компоненты векторов состояния в окрестности их балансирующих значений. В этом случае говорят, что осуществляется управление состоянием. Для

реализации такого управления должны измеряться все компоненты вектора состояния, а управление часто формируют в виде линейной стационарной отрицательной обратной связи по состоянию –

$$u(t) = -K \cdot x(t). \quad (1.5)$$

В идеальном случае, когда измерительные устройства безынерционные и дают точные текущие значения переменных состояния, управляющие сигналы $[\delta_\theta(t)]$ и $[\delta_\eta(t) \ \delta_\gamma(t)]^T$ могут формироваться по законам, определяемым равенствами:

– для продольного движения (*longitudinal motion*):

$$\delta_\theta(t) = -K_{long} \cdot x_{long}(t), \quad (1.6)$$

где $x_{long}(t) = [\theta \ \vartheta \ \omega_z \ h]^T$ – вектор-функция состояния модели продольного движения ЛА;

K_{long} – матрица-строка коэффициентов усиления отрицательной обратной связи;

– для бокового движения (*lateral motion*):

$$\begin{bmatrix} \delta_\eta(t) \\ \delta_\gamma(t) \end{bmatrix} = -K_{lat} \cdot x_{lat}(t), \quad (1.7)$$

где $x_{lat}(t) = [\psi \ \omega_y \ \gamma \ \omega_x \ \beta]^T$ – вектор-функция состояния модели бокового движения ЛА;

K_{lat} – матрица из двух строк с коэффициентами усиления отрицательной обратной связи.

Следует подчеркнуть, что законы управления (1.6) и (1.7) могут быть реализованы только в случае измерения **всех** компонентов вектора состояния. Если же измерения всех переменных состояния или не проводится или невозможно или выполняется не точно (с ошибками (шумами) измерений), то возникает проблема восстановления вектора состояния $x(t)$ по вектору наблюдаемых (измеряемых) переменных $y(t)$, обычно линейно связанному с вектором состояния соотношением (1.2). Задача управления состоянием в этом случае может быть решена при выполнении условия полной наблюдаемости системы (1.1), (1.2).

Будем считать, что в задаче стабилизации ЛА в вертикальной плоскости (продольное движение) выходной управляемой переменной y_{long} является отклонение угла тангажа ϑ от нулевого значения, тогда уравнение выходов (1.2) для этого случая примет следующий вид

$$y_{long}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ g \\ \omega_z \\ h \end{bmatrix} = g(t). \quad (1.8)$$

Уравнение состояния (1.3) и выходов (1.8) формируют математическую модель продольного движения ЛА как управляемого объекта, имеющего один управляющий вход $\delta_\theta(t)$ и один управляемый выход $g(t)$ – SISO-объект (Single-Input Single-Output). Модель продольного движения ЛА в форме передаточной функции, связывающей изображения входа $\delta_\theta(s)$ и выхода $g(s)$, определяется дробно-рациональной функцией

$$W_{long}(s) = \frac{-1.63(s + 0.95)(s - 0.17)}{(s + 0.38)(s - 0.36)(s^2 + 1.62s + 5.47)}.$$

Для модели бокового движения (1.4) в качестве вектора y_{lat} выходных управляемых переменных выберем две переменных – угол рыскания ψ и угол крена γ , тогда уравнение выходов будет иметь вид

$$y_{lat}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi \\ \omega_y \\ \gamma \\ \omega_x \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix}. \quad (1.9)$$

Уравнение состояния (1.4) и выходов (1.9) формируют математическую модель бокового движения ЛА как управляемого объекта, имеющего два управляющих входа и $(\delta_\eta, \delta_\gamma)$ и два управляемых выхода (ψ, γ) – MIMO-объект (Multiple-Input Multiple-Output). Модель бокового движения ЛА в форме матричной передаточной функции, связывающей изображения вектора-входа $[\delta_\eta(s), \delta_\gamma(s)]^T$ и вектора-выхода $[\psi(s), \gamma(s)]^T$, определяется матрицей дробно-рациональных функций

$$W_{lat}(s) = \frac{\begin{bmatrix} \frac{-0.63(s + 1.75)(s^2 - 0.22s + 0.97)}{s} & \frac{0.16(s + 1.81)(s^2 - 0.74s + 2.99)}{s} \\ \frac{s}{0.9(s^2 + 0.31s + 3.15)} & \frac{s}{-2.3(s^2 + 0.19s + 1)} \end{bmatrix}}{(s + 1.73)(s + 0.04)(s^2 - 0.07s + 1.47)}.$$

Необходимые сведения для выполнения задания

Формирование математической модели системы управления в пространстве состояний необходимо осуществить с помощью функции **ss** из специализированного пакета программ Control System Toolbox [6, 7].

Коэффициенты характеристического полинома матрицы можно определить с помощью функции **poly** [8, 9, 10]. Собственные числа матрицы (нули характеристического полинома) вычисляются функциями **roots** или **eig**. Для изображения точек на комплексной плоскости можно воспользоваться функцией **plot**, предварительно образовав два векторных массива из вещественных (ось X) и мнимых (ось Y) частей комплексных чисел. Если задана модель системы, то для изображения на комплексной плоскости нулей и полюсов проще использовать функцию **pzmap**.

Формирование математической модели системы управления в виде передаточной функции осуществляется с помощью функций **tf** или **zpk** из специализированного пакета программ Control System Toolbox, а для извлечения информации о полиномах передаточной функции можно воспользоваться функциями **tfddata** или **zpkdata**.

Если рассматривается SISO-система, то применение функции **tfddata** с указанием выходных параметров **num** и **den** и входного параметра **v** в виде **[num,den]=tfddata(sys_tf,'v')** позволяет непосредственно получить векторы коэффициентов числителя (**num**) и знаменателя (**den**) передаточной функции. В случае работы с MIMO-системой вызов функции **tfddata** в виде **[num,den]=tfddata(sys_tf)** возвращает объекты **num** и **den** как массивы ячеек с векторами коэффициентов числителей и знаменателей передаточных функций от конкретного входа к конкретному выходу. Тогда, чтобы получить, например, вектор коэффициентов знаменателя передаточной функции от первого входа ко второму выходу и сохранить его в переменной **vz**, следует выполнить инструкцию **vz=den{2,1}**.

При необходимости изображения нового графика в текущих графических координатах используйте директиву **hold on**.

Для вычисления коэффициентов характеристического полинома

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_1s + a_0$$

и присоединённой матрицы

$$\text{adj}[sI - A] = s^{n-1}I + s^{n-2}R_1 + \dots + sR_{n-2} + R_{n-1}$$

необходимо применить алгоритм Леверье – Фаддеева¹:

¹ Гантмахер Ф.Р. Теория матриц /Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988 –552с.

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= I, \\ a_{n-k} &= -\frac{1}{k} \text{tr}(AR_{k-1}), \\ R_k &= AR_{k-1} + a_{n-k}I. \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Знак tr означает след (*trace*) матрицы, т.е. сумму её диагональных элементов (соответствующая функция Matlab – **trace**). Правильность вычислений проверяется выполнением соотношения $R_n=0$.

Критерий устойчивости Гурвица [2]. Для того чтобы многочлен $\varphi(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ был асимптотически устойчивым, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные (ведущие) миноры матрицы Гурвица (определители Гурвица) были положительны.

Матрица Гурвица строится из коэффициентов характеристического полинома $\varphi(\lambda)$ следующим образом

$$H = \begin{bmatrix} a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & 1 & \dots & 0 \\ a_{n-5} & a_{n-4} & a_{n-3} & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления определителей (детерминантов) служит функция **det**.

Матрица управляемости системы (1.1) $U = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B]$ может быть сформирована или *горизонтальной* конкатенацией (объединением) соответствующих матриц или с помощью функции **ctrb** пакета программ Control System Toolbox. Ранг матрицы вычисляют, используя функцию **rank**.

Матрица наблюдаемости системы (1.1), (1.2) $N = [C; CA; CA^2; \dots CA^{n-1}]$ может быть сформирована или *вертикальной* конкатенацией соответствующих матриц или с помощью функции **obsv** пакета программ Control System Toolbox.

Вывод на экран информационных сообщений в процессе выполнения программы осуществляют функцией **disp**.

Для управления вычислительным процессом (условия и циклы) в Matlab-программах используют следующие операторы [8, 9, 10]:

- простые и составные операторы условного ветвления **if ... end**;
- оператор цикла с предусловием выхода **while ... end**;
- оператор цикла с предопределённым числом повторений **for ... end**.

1.3 Программа и порядок выполнения работы

В работе исследуются:

- устойчивость объекта управления (1.1);
- устойчивость замкнутой системы управления (1.1), (1.5);

- управляемость объекта управления (1.1);
- наблюдаемость объекта управления (1.1), (1.2).

При выполнении лабораторной работы проводится исследование одной из двух предложенных моделей ЛА: модели продольного движения (1.3), (1.8) или модели бокового движения (1.4), (1.9). Для выполнения заданий лабораторной работы создаются одна или несколько Matlab-программ в виде **m**-файлов. Программы предназначены для реализации приведённых ниже действий и расчётов.

1. Формирование матриц коэффициентов математической модели системы управления полётом самолёта – матриц A , B , C .
2. Формирование Matlab-модели системы управления в пространстве состояний.
3. Определение качественных свойств и числовых характеристик объекта управления (1.1) и системы управления (1.1), (1.5).

3.1. Устойчивость

а) Определить коэффициенты характеристического многочлена (полинома) матрицы A . Вычислить собственные числа матрицы A (нули характеристического полинома). Изобразить их на комплексной плоскости.

Получить Matlab-модель системы (1.1), (1.2) в виде матричной передаточной функции. Извлечь из неё полином знаменателя, найти его нули, сравнить с найденными выше и изобразить их на том же графике.

Вычислить коэффициенты характеристического полинома матрицы A методом Леве́рье-Фаддеева. Найти нули характеристического полинома, сравнить их с полученными выше и изобразить их на том же графике.

Применить критерий Гурвица для проверки устойчивости системы.

Сделать вывод об устойчивости объекта (1.1);

б) Принять коэффициенты отрицательной обратной связи по состоянию в (1.5) равными:

– для модели продольного движения (1.3), (1.6):

$$K = [-3.21 \quad -0.75 \quad -0.61 \quad -0.005];$$

– для модели бокового движения (1.4), (1.7):

$$K = \begin{bmatrix} -0.79 & -1.14 & 0.3 & 0.14 & -0.03 \\ 0.62 & 0.1 & -1.02 & -0.48 & 0.14 \end{bmatrix}.$$

В этом случае матрица коэффициентов уравнения состояний замкнутой системы (1.1), (1.5) будет иметь вид $A_{\text{замкн.}} = A - BK$;

в) Выполнить аналогичные пункту **а)** задания для замкнутой системы (1.1), (1.5);

г) Построить единичную переходную характеристику замкнутой системы. Определить показатели качества для каждого выхода.

3.2. Управляемость

Сформировать матрицу управляемости для системы (1.1). Вычислить её ранг и сделать вывод об управляемости системы.

3.3. Наблюдаемость

Сформировать матрицу наблюдаемости для системы (1.1), (1.2). Вычислить её ранг и сделать вывод о наблюдаемости системы.

1.4 Содержание отчёта и порядок защиты работы

В отчёте по лабораторной работе должны быть отражены цель, необходимые сведения о методах решения рассматриваемых задач и средствах среды Matlab, тексты программ, численные и графические результаты расчётов и построений, выводы по работе.

Защита результатов лабораторной работы производится за компьютером при наличии работающих программ и полностью оформленного отчёта. В ходе защиты студент может получить дополнительные теоретические вопросы и практические задания по существу работы.

1.5 Контрольные вопросы

1. Что является основным вычислительным объектом системы Matlab?
2. Как управлять выводом на экран результатов вычислений?
3. Каким образом осуществляется доступ к элементам, строкам и столбцам матриц в Matlab?
4. Что такое операция конкатенации матриц?
5. Сформулируйте определение ранга матрицы.
6. Сформулируйте известные вам алгебраические критерии устойчивости линейных стационарных систем.
7. Дайте определения управляемости и наблюдаемости.
8. Сформулируйте известные вам алгебраические критерии управляемости и наблюдаемости линейных стационарных систем.
9. Перечислите известные вам временные характеристики САУ и дайте их формулировки.
10. Перечислите известные вам показатели качества САУ и дайте их формулировки.
11. Поясните на примере процедуру линеаризации модели нелинейного непрерывного динамического объекта управления.

2 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2. КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ. ВЕЩЕСТВЕННЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ МАТРИЦЫ

2.1 Цель работы

Исследование применения невырожденных линейных преобразований к моделям ЛСС в пространстве состояний, получение канонических представлений моделей ЛСС, анализ свойств вещественных симметрических матриц и квадратичных форм, Развитие навыков программирования в среде Matlab.

2.2 Краткие теоретические сведения

Важную роль при решении задач анализа и синтеза линейных стационарных систем автоматического управления играют знания линейной алгебры [3].

Переход к определённому базису в пространстве состояний с помощью конкретного невырожденного линейного преобразования приводит к изменению значений коэффициентов матриц линейных систем, придавая этим матрицам специальные (канонические) формы. Различные канонические формы (представления) матриц могут существенно упростить формулировки алгоритмы и вычислительные схемы анализа систем, синтеза регуляторов и наблюдателей состояния и др.

Особое значение в теории оптимизации играют вещественные симметрические матрицы (ВСМ) и соответствующие им квадратичные формы. Знакоопределённость и другие свойства ВСМ существенным образом влияют на физическую и математическую корректность постановок задач оптимизации, существование и единственность их решений [1, 3, 5, 11].

Линейные невырожденные преобразования и канонические формы

Линейные невырожденные преобразования в пространстве состояний оставляют неизменными соотношения между входом и выходом системы. Связь между векторами состояния в исходном (x) и новом ($\tilde{x}$) пространствах состояний определяется в виде простого соотношения $\tilde{x} = Px$, где P – невырожденная матрица размером $n \times n$. В результате такого преобразования уравнения системы (1.1), (1.2) примут вид [3, 4]

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = PAP^{-1}\tilde{x}(t) + PBu(t), \\ y(t) = CP^{-1}\tilde{x}(t) \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}u(t), \\ y(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t). \end{cases}$$

Выполняя преобразование переменных состояния с помощью соотношения $\tilde{x} = Px$, мы не меняем формы уравнений модели пространства состояний системы (уравнений состояния и выходов). Размерности векторов состояния, управления и выхода при таких преобразованиях также сохраняются, изменяются только значения элементов всех матриц системы.

Матрицы системы в новом пространстве связаны с матрицами исходной системы следующими соотношениями

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PB, \quad \tilde{C} = CP^{-1}. \quad (2.1)$$

Уравнения модели системы с матрицами специальных структур называют уравнениями модели в канонической форме.

Рассмотрим две основные канонические формы: управляемости и наблюдаемости [4, 12, 13]. Для простоты представлений будем считать, что система управления имеет скалярные вход и выход – SISO-система. Это означает, что матрица входов B в уравнении (1.1) является вектором-столбцом, а матрица выходов C в соотношении (1.2) имеет вид вектора-строки:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad C = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]. \quad (2.2)$$

Предположим, что система (1.1), (1.2)

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad (1.1)$$

$$y(t) = C \cdot x(t). \quad (1.2)$$

полностью управляема и полностью наблюдаема. Везде далее через α_i будем обозначать коэффициенты характеристического полинома матрицы A :

$$\varphi(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \alpha_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0. \quad (2.3)$$

Каноническая форма управляемости (скалярный вход)

Эта форма предполагает специальный вид матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Матрица P перехода к новому состоянию $\tilde{x} = Px$ вычисляется по формуле

$$P = [\tilde{B} : A\tilde{B} : \tilde{A}^2\tilde{B} : \dots : \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}] \cdot [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B]^{-1}. \quad (2.5)$$

Каноническая форма наблюдаемости (скалярный выход)

Данная форма имеет специальную структуру матриц $\tilde{A}$ и $\tilde{C}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-2} & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = [1 \ 0 \ \dots \ 0]. \quad (2.6)$$

Матрица P перехода к новому состоянию $\tilde{x} = Px$ вычисляется по формуле

$$P = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Вещественные симметрические матрицы и квадратичные формы

Вещественной симметрической матрицей (ВСМ) называют матрицу с вещественными коэффициентами, равную своей транспонированной $A=A^T$. ВСМ обладают тремя замечательными свойствами [3]:

- собственные значения ВСМ вещественны;
- собственные векторы ВСМ взаимно ортогональны;
- ВСМ может быть диагонализирована ортогональной матрицей S :

$S^{-1}AS = \Lambda$, здесь A – исходная ВСМ, а $\Lambda = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n]$.

Матрица S называется ортогональной, если все её столбцы взаимно ортогональны и каждый нормирован. Из этого определения следует, что $S^T S = I$ и поэтому $S^T = S^{-1}$.

С учётом последнего замечания соотношение $S^{-1}AS = \Lambda$ приводится к виду $A = SAS^T$. Отсюда следует, что любая ВСМ может быть представлена как $A = SAS^T = \lambda_1 v_1 v_1^T + \lambda_2 v_2 v_2^T + \dots + \lambda_n v_n v_n^T$, где λ_i , v_i – соответственно собственные числа и собственные векторы ВСМ A . Это разложение известно под названием спектральной теоремы [3].

На основе ВСМ строятся вещественные квадратичные формы.

Квадратичной формой называется однородный многочлен второй степени относительно n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ [3]. Квадратичную форму всегда можно представить в векторно-матричном виде

$$x^T A x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

где $A=\{a_{i,j}\}$ – вещественная симметрическая матрица квадратичной формы;
 $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор независимых переменных.

Вещественная квадратичная форма $x^T A x$ называется *положительно определённой*, если для любого не равного нулю вещественного вектора x выполняется неравенство $x^T A x > 0$. В этом случае ВСМ A называется *положительно определённой*, записывают $A > 0$.

Вещественная квадратичная форма $x^T A x$ называется *отрицательно определённой*, если для любого не равного нулю вещественного вектора x выполняется неравенство $x^T A x < 0$. Соответствующая ВСМ A называется *отрицательно определённой*, записывают $A < 0$.

Вещественная квадратичная форма $x^T A x$ называется *положительно полуопределённой*, если для любого не равного нулю вещественного вектора x выполняется неравенство $x^T A x \geq 0$. В этом случае ВСМ A называется *положительно полуопределённой*, записывают $A \geq 0$.

Вещественная квадратичная форма $x^T A x$ называется *отрицательно полуопределённой*, если для любого не равного нулю вещественного вектора x выполняется неравенство $x^T A x \leq 0$. Соответствующая ВСМ A называется *отрицательно полуопределённой*, записывают $A \leq 0$.

Известны несколько критериев знакоопределённости ВСМ и соответствующих им квадратичных форм [3]:

1. Для того чтобы ВСМ удовлетворяла условию $A > 0$ ($A \geq 0$, $A < 0$, $A \leq 0$), необходимо и достаточно, чтобы её собственные значения λ_i удовлетворяли условию $\lambda_i > 0$ ($\lambda_i \geq 0$, $\lambda_i < 0$, $\lambda_i \leq 0$) для всех i ;

2. Критерий Сильвестра. Для того чтобы ВСМ A порядка $n \times n$ была *положительно определённой*, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры этой матрицы

$$D_1 = a_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

были положительными, т.е. $D_1 > 0, D_2 > 0, \dots, D_n > 0$.

Для того чтобы ВСМ была *отрицательно определённой*, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры этой матрицы нечётно порядка были отрицательными, а чётно – положительными:

$$D_1 < 0, D_2 > 0, \dots, (-1)^n D_n > 0.$$

Для того чтобы ВСМ была *положительно полуопределённой*, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные (не только главные) миноры этой матрицы были неотрицательны: $M_p \geq 0, p=1, 2, \dots, n$. Здесь M_p – произвольный диагональный минор порядка p .

Для того чтобы ВСМ была *отрицательно полуопределённой*, необходимо и достаточно, чтобы все диагональные (не только главные) миноры этой матрицы удовлетворяли условиям: $(-1)^p M_p \geq 0, p=1, 2, \dots, n$. Здесь M_p – произвольный диагональный минор порядка p .

3. Критерий Якоби. Для того чтобы ВСМ была *положительно определённой*, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты её характеристического многочлена (2.3) были отличны от нуля и имели чередующиеся знаки –

$$\alpha_i \neq 0, i = \overline{0, n-1}; \quad (-1)^{n-1} \alpha_{n-1} < 0, \dots, \alpha_1 < 0, \alpha_0 > 0.$$

Для того чтобы ВСМ была *отрицательно определённой*, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты её характеристического многочлена (2.3) были положительными: $\alpha_i > 0, i = \overline{0, n-1}$.

2.3 Модели объектов управления

Рассматриваются математические модели двух динамических объектов:

– линейная модель движения ЛА в вертикальной плоскости (продольное движение – *longitudinal motion*), представленная соотношениями (1.3), (1.8) (см. указания к лабораторной работе №1)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \vartheta \\ \omega_z \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.86 & 0.86 & 0 & 0.61 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4.85 & -4.85 & -0.777 & 0.12 \cdot 10^{-4} \\ 257 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \vartheta \\ \omega_z \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0268 \\ 0 \\ -1.625 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\delta_e], \quad (2.8)$$

$$y_{long}(t) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \vartheta \\ \omega_z \\ h \end{bmatrix} = \vartheta(t).$$

где θ – угол наклона траектории; ϑ – угол тангажа; ω_z – угловая скорость тангажа; h – отклонение по высоте полёта; δ_e – угол отклонения руля высоты;

– математическая модель движения обычного маятника, расположенного на движущейся тележке [14]. Схема маятника показана на рисунке 2.1. Ось маятника монтируется на тележке, перемещающейся в горизонтальном направлении. Тележка приводится в действие мотором, который в момент времени t формирует силу $u(t)$. Состояние покоя маятниковой системы определяется неподвижностью тележки и строго верти-

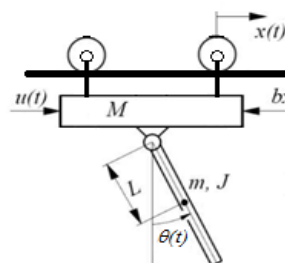


Рисунок 2.1 – Схема обычного маятника на тележке (портальный кран)

маятниковой системы определяется неподвижностью тележки и строго верти-

кальным нижнем положением самого маятника. В это положение система всегда возвращается из любого, отличного от покоя, состояния.

Здесь введены следующие обозначения: M – масса тележки; m – масса маятника; J – момент инерции маятника относительно центра тяжести; b – коэффициент вязкого трения при движении тележки; C – коэффициент вязкого трения в креплении маятника; L – расстояние между осью маятника и центром его тяжести; $u(t)$ – сила, прикладываемая к тележке (управление); $x(t)$ – значение горизонтального перемещения тележки; θ – угол отклонения маятника в положительном направлении от вертикали вниз; g – ускорение свободного падения.

Проведём линеаризацию динамической модели маятника [14] в окрестности положения устойчивого равновесия (неподвижная тележка и неподвижное строго вертикальное вниз положение маятника). Определим векторы состояния $x(t)$, управления $u(t)$ и выхода $y(t)$ как векторы, составленные из малых отклонений от координат точки линеаризации в пространстве состояний:

$$x(t) = \begin{bmatrix} \Delta x(t) \\ \Delta \theta(t) \\ \Delta \dot{x}(t) \\ \Delta \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = [\Delta u(t)], \quad y(t) = [\Delta \theta(t)].$$

Матрицы модели пространства состояний линеаризованного объекта примут следующие значения:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2,4 & -11,77 & 0,26 \\ 0 & -52,86 & 50,95 & -5,72 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,51 \\ -10,84 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$C = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0].$$

2.4 Задание на работу

Результатом выполнения лабораторной работы является одна или несколько Matlab-программ в виде **m**-файлов. В программах должны быть реализованы приведённые ниже действия и расчёты.

1. Привести модель линеаризованного объекта (2.8)/(2.9) к канонической форме управляемости (2.4) в соответствии с формулами (2.5) и (2.1).
2. Привести модель объекта (2.8)/(2.9) к канонической форме наблюдаемости (2.6) в соответствии с формулами (2.7) и (2.1).
3. Проанализировать вещественные симметрические матрицы M и N :

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 10 & -15 \\ 0 & 15 & -32 & 49 & -62 \\ -4 & -32 & 92 & -160 & 221 \\ 10 & 49 & -160 & 301 & -442 \\ -15 & -62 & 221 & -442 & 683 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 & 7 & 14 \\ 0 & -14 & -29 & -44 & -56 \\ 3 & -29 & -85 & -146 & -202 \\ 7 & -44 & -146 & -275 & -402 \\ 14 & -56 & -202 & -402 & -620 \end{pmatrix}.$$

- 3.1. Найти собственные числа и собственные векторы матриц.
- 3.2. Проверить взаимную ортогональность собственных векторов.
- 3.3. Провести диагонализацию матриц.
4. Протестировать матрицы на знакоопределённость, применив критерии Сильвестра и Якоби.

2.5 Необходимые сведения для выполнения задания

Пункты 1 и 2 задания выполняются с помощью обычных операций над матрицами. Для формирования матриц управляемости и наблюдаемости применить функции **ctrb** и **obsv** из специализированного пакета программ Control System Toolbox [7, 13].

Собственные значения и собственные векторы матриц определять проще всего с помощью функции **eig**.

Для выполнения пункта 4 потребуются функции **poly** и **det**.

2.6 Содержание отчёта и порядок защиты работы

В отчёте по лабораторной работе должны быть отражены цель, необходимые сведения о методах решения рассматриваемых задач и средствах среды Matlab, тексты программ, численные и графические результаты расчётов и построений, выводы по работе.

Защита результатов лабораторной работы производится за компьютером при наличии работающей программы и полностью оформленного отчёта. В ходе защиты студент может получить дополнительные практические задания по существу работы.

2.7 Контрольные вопросы

1. Поясните достаточность невырожденности матрицы управляемости для полной управляемости SIMO-объекта.
2. Поясните достаточность невырожденности матрицы наблюдаемости для полной наблюдаемости MISO-объекта.
3. Перечислите основные свойства ВСМ.
4. Дайте определение ортогональной матрицы.
5. Сформулируйте понятие квадратичной формы.
6. Какими свойствами должна обладать матрица квадратичной формы?
7. Почему матрицу квадратичной формы всегда можно выбрать симметричной?
8. Сформулируйте определения и критерии положительной определённости квадратичных форм и матриц.

3 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3. СИНТЕЗ МОДАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ САУ

3.1 Цель работы

Изучение и применение процедуры синтеза модального регулятора, стандартных средств среды Matlab для операций над матрицами, интегрирования дифференциальных уравнений и построения графиков решений. Освоение специальных функций пакета программ Control System Toolbox для формирования математических представлений линейных динамических систем и моделирования их движения. Закрепление навыков и умений разработки сложных Matlab-программ.

3.2 Объект исследования

Продолжим рассмотрение примеров систем управления возмущёнными продольным (1.3) и боковым (1.4) движениями самолёта (см. лабораторную работу №1). Предположим, что управляющие воздействия формируются в виде пропорциональных обратных связей по состоянию (1.5)

$$u(t) = -K \cdot x(t), \quad (1.5)$$

соответственно, в задаче управления продольным движением ЛА – (1.6)

$$\delta_\epsilon(t) = -K_{long} \cdot x_{long}(t) = -[k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]_{long} \cdot \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \vartheta(t) \\ w_z(t) \\ h(t) \end{bmatrix}, \quad (1.6)$$

а в задаче управления боковым движением ЛА – (1.7)

$$\begin{bmatrix} \delta_\eta(t) \\ \delta_\gamma(t) \end{bmatrix} = -K_{lat} \cdot x_{lat}(t) = -\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} \end{bmatrix}_{lat} \cdot \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \omega_y(t) \\ \gamma(t) \\ \omega_x(t) \\ \beta(t) \end{bmatrix}. \quad (1.7)$$

Расширим функциональные возможности систем управления (1.1), (1.2), (1.5) путём добавления в модели движения ЛА возможности подачи на входы постоянных задающих воздействия u_3 . Для таких случаев будем формировать управления, подаваемые непосредственно на объекты, в виде суммы

$$u(t) = -K \cdot x(t) + \Phi_3^{-1}(0) \cdot u_3, \quad (3.1)$$

где $\Phi_3(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$ – матричная передаточная функция замкнутой системы по управлению;

u_3 – постоянное задающее входное воздействие (для продольного движение – необходимый угол тангажа ЛА, для бокового движения – необходимые углы курса и крена ЛА).

Выбор матричного коэффициента $\Phi_3^{-1}(0)$ в выражении (3.1) обеспечивает замкнутой системе требуемую точность в статике — нулевую статическую ошибку по *постоянному* задающему воздействию. Соответствующая уравнениям (1.1), (1.2) и (3.1) структурная схема системы управления приведена на рисунке 3.1

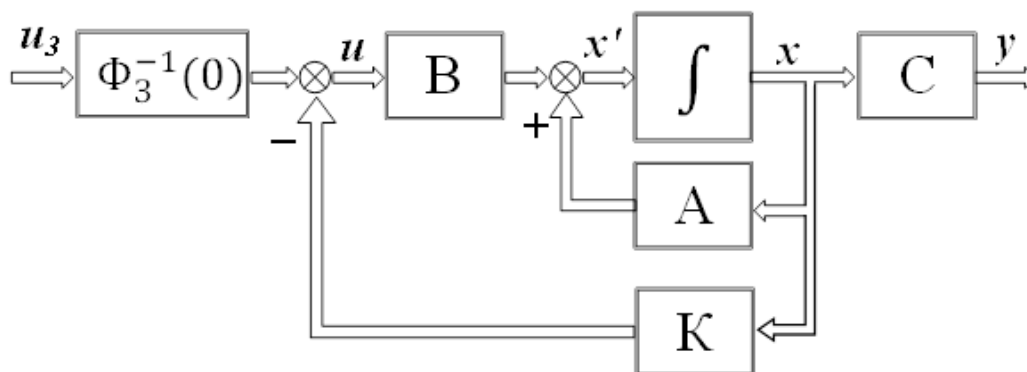


Рисунок 3.1 – Структурная схема систем управления возмущённым движением самолёта

Чтобы провести моделирование движения каждой из двух систем управления необходимо иметь численные значения матриц коэффициентов обратных связи по состоянию K_{long} и K_{lat} . Для расчёта этих коэффициентов применим одну из процедур синтеза регуляторов, а именно, процедуру синтеза модального регулятора [12, 13]. В случае скалярного управления (как в первой модели продольного движения ЛА) эта процедура существенно упрощается и программная реализация её не представляет особых трудностей.

3.3 Краткие теоретические сведения

Модальное управление определяется как управление (1.5), которое устанавливает моды – собственные значения матрицы $A-B \cdot K$ динамических коэффициентов замкнутой системы (объекта (1.1) совместно с регулятором (1.5)) и, тем самым, придаёт замкнутой системе желаемые динамические свойства [12, 13]. Принципиальная возможность синтеза модального регулятора обеспечивается условием полной управляемости объекта (1.1).

Справедливо следующее утверждение [12]: Для полностью управляемого n -мерного линейного стационарного объекта управления (1.1) существует такая матрица обратной связи по состоянию K , что характеристический многочлен матрицы $A-B \cdot K$ замкнутой системы будет совпадать с любым, наперёд заданным многочленом $\varphi(\lambda)$ с вещественными коэффициентами вида

$$\varphi(\lambda) = \lambda^n + \beta_{n-1}\lambda^{n-1} + \beta_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + \beta_1\lambda + \beta_0.$$

Естественно, что на практике интерес представляют случаи, когда данный многочлен имеет только левые нули – замкнутая система управления асимптотически устойчива. Проектировщик, задавая конкретное расположение нулей характеристического полинома замкнутой системы, руководствуется не только обеспечением устойчивости, но и определёнными требованиями к качеству переходных процессов.

Сама процедура синтеза модального регулятора предполагает, что набор желаемых собственных чисел матрицы динамических коэффициентов замкнутой системы $A-B \cdot K$ известен.

Приведём алгоритм синтеза модального регулятора для линейной стационарной системы со *скалярным входом* [12].

1. Пусть исходная полностью управляемая система задана уравнениями пространства состояний (1.1) $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$. Управление в виде обратной связи формируется как $u(t) = -Kx(t)$. Здесь, в силу того, что $u(t)$ является скалярной функцией, матрица K коэффициентов обратной связи по состоянию представляет собой вектор-строку $K = [k_0 \ k_1 \ \dots \ k_{n-2} \ k_{n-1}]$ с n компонентами. Характеристический полином $\psi(s) = \det(sI - A)$ исходной системы известен

$$\psi(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \alpha_{n-2}s^{n-2} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0.$$

2. Задать желаемые собственные числа матрицы замкнутой системы $A-BK$ (комплексное собственное число может присутствовать только в паре со своим комплексно сопряжённым) – $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$.

3. По заданным $\lambda_i, i=1, 2, \dots, n$, необходимо получить характеристический полином замкнутой системы $\varphi(s) = s^n + \beta_{n-1}s^{n-1} + \beta_{n-2}s^{n-2} + \beta_1s + \beta_0$, другими словами, следует рассчитать коэффициенты $\beta_i, i=0, 1, \dots, n-1$.

4. Определить для исходной системы (1.1) матрицу невырожденного линейного преобразования P (2.5), переводящую модель системы в каноническую форму управляемости (2.4).

5. Для модели системы в канонической форме управляемости $\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ вычислить n коэффициентов матрицы обратных связей $\tilde{K}$ по формулам

$$\tilde{k}_0 = \beta_0 - \alpha_0, \quad \tilde{k}_1 = \beta_1 - \alpha_1, \quad \tilde{k}_2 = \beta_2 - \alpha_2, \dots, \tilde{k}_{n-1} = \beta_{n-1} - \alpha_{n-1}.$$

6. Вычислить матрицу коэффициентов обратных связей по состоянию K для исходной системы (1.1) как $K = \tilde{K} \cdot P$.

7. Проверочный шаг алгоритма. Вычислить нули характеристического полинома $\det[sI - (A - B \cdot K)]$ и сравнить их с заданными $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$. Они должны совпасть.

3.4 Задание на работу

Результатом выполнения лабораторной работы является одна или несколько Matlab-программ в виде **m**-файлов. В программах должны быть реализованы приведённые ниже действия и расчёты.

1. Синтезировать модальный регулятор для системы (1.1), задав произвольно необходимое количество левых нулей желаемого устойчивого характеристического полинома.

2. Получить числовое значение $\Phi_3^{-1}(0)$, предварительно вычислив $\Phi_3(s) = C(sI - A + BK)^{-1}B$ при $s=0$.

3. Сформировать Matlab-модель замкнутой системы управления в пространстве состояний по соотношениям (1.1), (3.1) и в соответствии со структурой, изображённой на рисунке 3.1.

4. Провести моделирование движения ЛА с помощью решения системы дифференциальных уравнений. Построить графики решений.

4.1. Ненулевые начальные условия и нулевой вход.

4.2. Нулевые начальные условия и постоянный вход.

5. Выполнить пункт 4 с помощью специальных функций пакета программ Control System Toolbox.

3.5 Необходимые сведения для выполнения задания

Проверить саму возможность синтеза модального регулятора – система (1.1) должна быть полностью управляемой.

В случае системы с *одним управляющим входом* (управление *продольным* движением ЛА), матрица линейного невырожденного преобразования P , для приведения модели системы (1.1) к канонической форме управляемости, вычисляется по формуле (2.5).

Для синтеза модального регулятора с желаемой динамикой необходимо задать n собственных значений матрицы динамических коэффициентов замкнутой системы $A-BK$. В качестве назначаемых собственных значений необходимо выбирать числа, лежащие в левой полуплоскости комплексной плоскости. Это по крайне обеспечит устойчивость замкнутой системе управления. Чтобы коэффициенты характеристического полинома замкнутой системы были вещественными, назначаемые комплексные собственные числа должны идти в паре со своими сопряжёнными.

Синтез модального регулятора для SISO-объекта (1.6) можно провести, выполнив шаги изложенного выше алгоритма, а можно использовать специальные функции пакета Control System Toolbox: **acker** или **place** [7, 13, 15].

Синтез модального регулятора для МИМО-объекта (1.7) обеспечивает только функция **place**. При этом следует иметь ввиду, что кратность любого из назначаемых собственных чисел для матрицы $A-BK$ не должна превышать ранга матрицы B .

Выполнение пункта 3 предполагает представление модели системы управления в пространстве состояний в виде $\dot{x} = (A - BK)x(t) + B\Phi_3^{-1}(0)u_3$. Здесь $\Phi_3^{-1}(0)$ – числовой объект.

Для выполнения пункта 4 необходимо применить один из численных методов решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка, представленных в нормальной форме. В нашем случае мы имеем систему из четырёх (пяти) дифференциальных уравнений первого порядка в нормальной форме $\dot{x} = (A - BK)x(t) + B\Phi_3^{-1}(0)u_3$.

Наиболее широко для решения поставленной задачи применяется стандартная Matlab-функция **ode45**. Эта функция осуществляет интегрирование нормальной системы ОДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка, а с помощью 5-го порядка контролируют величину шага так, чтобы обеспечить заданные пределы ошибок интегрирования [8, 9, 10].

Обращение к функции **ode45**, в случае минимально возможного набора параметров, имеет вид

$$[T, Y] = \text{ode45}(@\langle\text{имя_функции_правых_частей}\rangle, \text{tspan}, x0),$$

где $@\langle\text{имя_функции_правых_частей}\rangle$ – ссылка на Matlab-функцию для вычисления правых части системы ОДУ;

tspan – вектор-строка, определяющая интервал интегрирования $[t_0, t_f]$ и содержащая два значения: t_0 – начальное значение аргумента; t_f – конечное значение аргумента;

$x0$ – вектор начальных условий;

T – массив значений аргумента, размер которого зависит от способа задания интервала интегрирования tspan ;

Y – матрица решений системы дифференциальных уравнений.

Matlab-функция вычисления правых частей системы ОДУ может находиться либо в тексте самой вызывающей, либо в отдельном одноимённом **m**-файле. В приведённом варианте вызова функции **ode45** предполагается, что **m**-файл функции вычисления правых частей системы ОДУ находится в текущем каталоге. Если этот файл находится в другом каталоге, то в качестве первого аргумента функции **ode45** приводится ссылка на полное имя **m**-файла.

Приведём пример Matlab-программы для решения системы двух ОДУ и построения графиков этих решений. Пусть задана система ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - 5x_2(t) + 2 \cdot e^{-2.5t} \end{cases}$$

с начальными условиями $x_1(0)=0.5$, $x_2(0)=0$ и экспоненциально затухающим входным сигналом $e^{-2.5t}$. Необходимо решить систему уравнений и построить графики решений на интервале $0 \leq t \leq 10$.

Текст **m**-файла с функцией правых частей. Имя файла – **right.m**:

```
function dx = right(t,x)
    global A B;
    dx = zeros(2,1);
    dx = A*x+B*exp(-2.5*t);
```

Текст вызывающей программы (основной) программы:

```
global A B;
A=[0 1;-1 -5]; B=[0;2];
[T,Y] = ode45(@right, [0 10], [0.5 0]);
plot(T,Y(:,1), '- ', T,Y(:, 2), '-.');
```

Текст основной программы с включённым в него текстом функции

```
global A B;
A=[0 1;-1 -5]; B=[0;2];
[T,Y] = ode45(@right, [0 10], [0.5 0]);
plot(T,Y(:,1), '- ', T,Y(:, 2), '-. ');
function dx = right(t,x)
    global A B;
    dx = zeros(2,1);
    dx = A*x+B*exp(-2.5*t);
end
```

Выполнение пункта 5 предполагает использование специальных функций пакета программ Control System Toolbox **initial** и **lsim**.

3.6 Содержание отчёта и порядок защиты работы

В отчёте по лабораторной работе должны быть отражены цель, необходимые сведения о методах решения рассматриваемых задач и средствах системы Matlab, тексты программ, численные и графические результаты расчётов и построений, выводы по работе.

Защита результатов лабораторной работы производится за компьютером при наличии работающей программы и полностью оформленного отчёта. В ходе защиты студент может получить дополнительные вопросы теоретического характера и практические задания по существу работы.

3.7 Контрольные вопросы

1. В чём состоит назначение задачи синтеза систем управления?
2. Объяснить основную идею модального синтеза САУ.
3. Пояснить шаги алгоритма синтеза модального регулятора.
4. Каково назначение функции **place**?
5. Прокомментировать рисунок 3.1 и соотношение (3.1).
6. Пояснить механизм использования функции **ode45**?

4 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 4. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ СОСТОЯНИЯ

4.1 Цель работы

Исследование алгоритмов синтеза ЛКР состояния и моделирование оптимальной САУ. Применение специальных математических функций библиотеки Control System Toolbox, предназначенных для решения задачи ЛКО. Приобретение навыков программирования в среде Matlab.

4.2 Краткие теоретические сведения

Основная задача ЛКО

Объектом управления является линейный стационарный динамический объект, математическая модель которого задаётся уравнениями пространства состояний [1, 2]:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad (4.1)$$

$$y(t) = C \cdot x(t) + D \cdot u(t). \quad (4.2)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^p$ векторы-функции состояния, управления и выхода соответственно. A , B , C и D – числовые матрицы коэффициентов (параметров) объекта управления: A – матрица динамических коэффициентов размерности $n \times n$; B – матрица коэффициентов управления размерности $n \times m$; C – матрица коэффициентов выхода размерности $p \times n$; D – матрица прямой связи входа и выхода размерности $p \times m$. Поведение объекта рассматривается на полубесконечном интервале времени $t \in [0; \infty)$. Задано начальное состояние объекта управления $x(0) = x_0$.

Замечание. В основной задаче ЛКО в качестве вектора управляемого выхода $y(t)$ назначается весь вектор состояния $x(t)$. Поэтому в уравнении выходов (4.2) матрица C будет единичной ($p=n$), а матрица D – нулевой.

Основная задача ЛКО формулируется так:

требуется управлять объектом (4.1) таким образом, чтобы он из своего начального состояния x_0 переходил в нулевое конечное состояние $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ и при этом критерий качества управления $J(u)$ достигал минимума

$$J(u) = \int_0^{\infty} \{x^T \cdot Q \cdot x + u^T \cdot R \cdot u\} dt \rightarrow \min_{u \in \mathbb{R}^m}. \quad (4.3)$$

Здесь $Q \geq 0$, $R > 0$ – числовые вещественные симметрические матрицы штрафов критерия (функционала) качества указанной знакоопределённости.

Если матрица штрафов Q имеет ранг $\nu \leq n$, то она может быть представлена в виде $Q = N^T \cdot N$, где N – матрица размерности $\nu \times n$ и ранга ν .

Решение задачи (4.1), (4.3) обусловлено следующей теоремой.

Теорема 1. Пусть пара матриц $\{A, B\}$ полностью управляема, а пара матриц $\{A, N\}$ полностью наблюдаема. Тогда:

а) существует положительно определённое решение $S > 0$ уравнения Риккати

$$A^T \cdot S + S \cdot A + Q - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S = 0; \quad (4.4)$$

б) оптимальные управление $u^*(t)$ и поведение $x^*(t)$ для любого начального состояния x_0 , минимизирующие критерий качества (4.3), обеспечиваются алгоритмом в виде отрицательной обратной связи по состоянию

$$u^*(t) = -K \cdot x^*(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot S \cdot x^*(t), \quad K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S; \quad (4.5)$$

в) замкнутая (оптимальная система) система управления является асимптотически устойчивой с матрицей динамических коэффициентов в виде

$$A^* = A - B \cdot K = A - B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S; \quad (4.6)$$

г) функционал качества (4.3) на оптимальном процессе $\{u^*(t), x^*(t)\}$ принимает значение, равное

$$J^* = J(u^*, x^*) = x_0^T \cdot S \cdot x_0. \quad (4.7)$$

Комментарии к теореме.

1. Пара $\{A, B\}$ является полностью управляемой тогда и только тогда, когда $n \times n \cdot m$ – матрица управляемости $U = [B : AB : A^2B : \dots : A^{n-1}B]$ имеет максимальный (полный) ранг, равный n .

2. Пара $\{A, N\}$ является полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда $p \cdot n \times n$ матрица наблюдаемости V имеет максимальный ранг, равный n .

$$V = \begin{bmatrix} N \\ NA \\ NA^2 \\ \vdots \\ NA^{n-1} \end{bmatrix}$$

4.3 Объект исследования

В качестве объектов исследования выбираются две известных (см. указания к лабораторной работе №1) линейных модели слабозмущённого движения летательного аппарата (ЛА) для продольного и бокового движений, подробное их описание приведено в [5]:

– линейная модель движения ЛА в вертикальной плоскости (продольное движение – *longitudinal motion*) – уравнения (1.3), (1.6), (1.8). Управляющим входным сигналом здесь является угол отклонения руля высоты δ_δ . Управляемым выходом выбран вектор состояния $[\theta \ \vartheta \ \omega_z \ h]^T$, где θ , ϑ , ω_z и h – соответ-

ственно отклонения угла наклона траектории, угла тангажа, угловой скорости тангажа и высоты полёта.

– линейная модель движения ЛА в горизонтальной плоскости с учётом крена (боковое движение – *lateral motion*) – уравнения (1.4), (1.7), (1.9). Управлениями выбраны углы отклонения руля направления δ_n и элеронов δ_ϵ , а управляемым выходом – вектор состояния $\begin{bmatrix} \psi & \omega_y & \gamma & \omega_x & \beta \end{bmatrix}^T$, где ψ, γ, β – отклонения углов курса (рыскания), крена и скольжения, ω_y и ω_x – отклонения угловых скоростей рыскания и крена.

В случае полных и точных измерений текущих значений переменных состояния, линейно-квадратические регуляторы формируют управляющие сигналы $[\delta_\epsilon(t)]$ и $[\delta_n(t) \ \delta_\epsilon(t)]^T$ по линейным законам в форме (1.5) или (1.6), (1.7):

– для продольного движения (*longitudinal motion*) –

$$\delta_\epsilon(t) = -K_{long} \cdot x_{long}(t), \quad (1.6)$$

где $x_{long}(t) = [\theta \ \vartheta \ \omega_z \ h]^T$ – вектор-функция состояния модели продольного движения ЛА;

K_{long} – матрица-строка оптимальных коэффициентов усиления отрицательной обратной связи;

– для бокового движения (*lateral motion*) –

$$\begin{bmatrix} \delta_n(t) \\ \delta_\epsilon(t) \end{bmatrix} = -K_{lat} \cdot x_{lat}(t), \quad (1.7)$$

где $x_{lat}(t) = [\psi \ \omega_y \ \gamma \ \omega_x \ \beta]^T$ – вектор-функция состояния модели бокового движения ЛА;

K_{lat} – матрица из двух строк с оптимальными коэффициентами усиления отрицательной обратной связи.

4.4 Необходимые сведения из Matlab

Формирование линейного стационарного динамического объекта (LTI-объекта) в форме модели в пространстве состояний (4.1), (4.2) осуществляется функцией **ss**

$$\text{sys} = \text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$$

Проверка свойств управляемости и наблюдаемости LTI-объекта производится функциями **ctrb**, **obsv**, **rank**

$$\text{rank}(\text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) \quad \text{и} \quad \text{rank}(\text{obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{N}))$$

Функция **lqr** осуществляет формирование линейно-квадратичного регулятора состояния в задаче (4.1), (4.3) –

$$[\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{E}] = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}) \quad \text{или} \quad [\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{E}] = \text{lqr}(\text{sys}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

Функция возвращает матрицу **K** коэффициентов оптимальной обратной связи (4.5); решение уравнения Риккати в виде матрицы **S** (4.4); вектор **E** из собственных значений матрицы динамических коэффициентов оптимальной системы **A-B·K** (4.6).

4.5 Задание на работу

С помощью функций пакета Matlab выполнить анализ условий существования и синтез ЛКР состояния, провести моделирование оптимальной САУ. Для этого создать **m**-файл, в котором реализовать следующие действия:

а) ввести параметры линеаризованного объекта в виде модели пространства состояний (1.1). Задать матрицы **A** и **B**, а затем воспользоваться функцией **ss** (при этом матрицу **C** задать единичной, а **D** принять равной нулевой);

б) проверить условия управляемости пары (**A**, **B**);

в) задать единичными матрицы штрафов **Q** и **R**;

г) решить основную задачу ЛКО – задачу синтеза ЛКР состояния $x(t)$ объекта управления и провести моделирование оптимальной САУ:

1) определить матрицы коэффициентов **K** статических обратных связей, обеспечивающих минимальное значение функционала (4.3) для заданных единичными весовых матриц **Q** и **R**;

2) задать (физически обоснованный) вектор начального состояния x_0 , провести моделирование собственного движения оптимальной системы и построить его график;

3) по результатам моделирования оптимальной САУ построить график оптимального управления $u(t) = -K \cdot x(t)$;

д) произвести построение корневого годографа собственных чисел матриц синтезированных оптимальных систем стабилизации при изменении параметров, указанных в варианте исследований в таблице 4.1. Для этого, изменяя в цикле указанный в варианте параметр, решать задачу синтеза оптимального регулятора, определять векторы **E** собственных чисел матрицы **A-B·K** оптимальной системы и запоминать их в отдельном массиве. Затем полученный массив из собственных чисел отобразить графически в виде корневого годографа на комплексной плоскости. Параллельно в этом же цикле для каждой оптимальной системы в одном окне необходимо строить графики её собственного движения (пункт Γ_2), а в другом окне – графики оптимальных управлений (пункт Γ_3).

Выполнить задания пунктов Γ_2 и Γ_3 в Simulink [16, 17].

Таблица 4.1 – Варианты заданий

№ вар.	Параметры задания
нечётный	Изменять значения диагональных элементов весовой матрицы R .
чётный	Изменять значения диагональных элементов весовой матрицы Q .

4.6 Содержание отчёта и порядок защиты работы

По результатам проведённых исследований необходимо составить отчёт, который должен содержать:

- цель работы;
- необходимые сведения из теории с приведением и описанием основных математических соотношений, относящихся к постановке и решению задачи синтеза оптимального регулятора состояния;
- математическую модель объекта управления и её описание;
- текст Matlab-программы (**m**-файла), реализующей необходимые расчёты и построения процессов в оптимальной системе стабилизации;
- графики собственных движений и управлений, корневые годографы оптимальной системы стабилизации;
- Simulink-схему САУ и результаты моделирования в виде графиков;
- общие выводы о проделанной работе.

Защита результатов лабораторной работы производится за компьютером при наличии работающей программы и полностью оформленного отчёта. В ходе защиты студент может получить дополнительные практические задания по существу работы.

4.7 Контрольные вопросы

1. Сформулируйте в развёрнутом виде постановку общей задачи ЛКО детерминированным стационарным объектом на бесконечном интервале времени?
2. Поясните смысл понятия полной управляемости LTI-объекта.
3. Сформулируйте критерий полной управляемости LTI-объекта.
4. Поясните смысл понятия полной наблюдаемости LTI-объекта.
5. Сформулируйте критерий полной наблюдаемости LTI-объекта.
6. Каким требованиям должны удовлетворять LTI-объект управления и квадратичный критерий качества, чтобы существовало решение задачи ЛКО?
7. Требуется ли проверять наблюдаемость пары матриц (A, N) , если в функционале (1.2) матрица штрафа Q положительно определена?
8. Какие математические функции Matlab и для каких целей могут быть использованы при решении стационарной задачи ЛКО?
9. Поясните структуру Simulink-схемы оптимальной САУ, назначение и конкретные значения параметров каждого блока этой схемы.
10. Запишите основные уравнения, определяющие оптимальный регулятор. Предложите схему его физической реализации.
11. По результатам исследований поясните, на качественном уровне, влияние весовых матриц функционала на изменения форм графиков собственного движения ЛА и оптимальных управляющих воздействий.

5 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 5. ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ ВЫХОДА И МОДАЛЬНЫМ НАБЛЮДАТЕЛЕМ

5.1 Цель работы

Исследование алгоритмов синтеза ЛКР выхода и модального наблюдателя состояния полного порядка, моделирование оптимальной САУ. Применение специальных математических функций библиотеки Control System Toolbox, предназначенных для решения задач ЛКО и модального синтеза. Приобретение навыков программирования в среде Matlab и системе Simulink.

5.2 Краткие теоретические сведения

Задача оптимального управления выходом

В данном случае объектом управления является линейный стационарный динамический объект, математическая модель которого задаётся в пространстве состояний следующими двумя соотношениями [1, 2]:

$$\text{– уравнением состояния} \quad \frac{dx(t)}{dt} = A \cdot x(t) + B \cdot u(t), \quad (5.1)$$

$$\text{– уравнением выхода} \quad y(t) = C \cdot x(t). \quad (5.2)$$

Здесь $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $y \in \mathbb{R}^p$ векторы-функции состояния, управления и управляемого выхода соответственно. A , B и C – числовые матрицы коэффициентов (параметров) объекта управления: A – матрица динамических коэффициентов размерности $n \times n$; B – матрица коэффициентов управления размерности $n \times m$; C – матрица выходов размерности $p \times n$. Поведение объекта рассматривается на полубесконечном интервале времени $t \in [0; \infty)$. Задано начальное состояние объекта управления $x(0) = x_0$.

Требуется управлять объектом (5.1), (5.2) таким образом, чтобы он из своего начального состояния x_0 переходил в нулевое конечное *состояние по выходу* $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ и при этом критерий качества управления $J(u)$ достигал бы минимального значения

$$J(u) = \int_0^{\infty} \{ y^T \cdot M \cdot y + u^T \cdot R \cdot u \} dt \rightarrow \min_{u \in \mathbb{R}^m}. \quad (5.3)$$

Здесь $M \geq 0$, $R > 0$ – числовые вещественные симметрические матрицы штрафов критерия (функционала) качества указанной знакоопределённости. Если матрица штрафов M имеет ранг $v \leq p$, то она может быть представлена в виде $M = N^T \cdot N$, где N – матрица размерности $v \times p$ и ранга v .

Решение задачи (5.1), (5.2), (5.3) обусловлено следующей теоремой.

Теорема 2. Пусть пара матриц $\{A, B\}$ полностью управляема, а пара матриц $\{A, C\}$ полностью наблюдаема. Тогда:

а) существует положительно определённое $S > 0$ решение уравнения Риккати

$$A^T \cdot S + S \cdot A + C^T \cdot M \cdot C - S \cdot B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S = 0; \quad (5.4)$$

б) оптимальное управление $u^*(t)$ и поведение $x^*(t)$ для любого начального состояния x_0 , минимизирующие критерий качества (5.3) обеспечиваются структурой алгоритма в виде отрицательной обратной связи по состоянию

$$u^*(t) = -K \cdot x^*(t) = -R^{-1} \cdot B^T \cdot S \cdot x^*(t), \quad K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S; \quad (5.5)$$

в) замкнутая (оптимальная система) система управления является асимптотически устойчивой и принимает вид однородной системы с матрицей динамических коэффициентов в виде

$$A^* = A - B \cdot K = A - B \cdot R^{-1} \cdot B^T \cdot S; \quad (5.6)$$

г) функционал качества (5.3) на оптимальном процессе $\{u^*(t), x^*(t)\}$ принимает значение, равное

$$J^* = J(u^*, x^*) = x_0^T \cdot S \cdot x_0.$$

Наблюдатель состояния полного порядка

Линейно-квадратический регулятор (ЛКР) состояния или выхода (5.5) формирует оптимальное управляющее воздействие в виде отрицательной обратной связи по состоянию

$$u(t) = -K \cdot x(t), \quad K = R^{-1} \cdot B^T \cdot S.$$

Здесь K – $m \times n$ -матрица коэффициентов оптимальной обратной связи.

Практическая реализация ЛКР в виде обратной связи по состоянию (5.5) наталкивается на существенную проблему – необходимость иметь в каждый момент времени t полную и точную информацию о значении вектора состояния $x(t)$ объекта управления. В действительности только в очень редких случаях предоставляется возможность измерения всех компонентов вектора состояния $x(t)$ в каждый текущий момент времени. Обычно проводятся измерения либо нескольких компонентов вектора состояния, либо некоторой их линейной комбинации (5.2). Таким образом, чтобы практически реализовать закон (5.5) необходимо формировать в каждый текущий момент времени t вектор $\hat{x}(t)$, "близкий" к истинному значению вектора состояния $x(t)$.

Такой вектор $\hat{x}(t)$ называют *вектором-оценкой* состояния $x(t)$. Чем точнее оценка $\hat{x}(t)$ будет повторять истинный вектор состояния $x(t)$, тем меньше будет отличаться реальное (субоптимальное, почти оптимальное) значения управляющего сигнала $u(t)$

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t) \quad (5.7)$$

от идеального (оптимального) $u^*(t)$ в (5.5).

Для получения в темпе реального времени оценки вектора состояния $\hat{x}(t)$ необходимо сформировать динамическую систему (*наблюдатель*), которая на основе доступной текущей информации о системе (управления $u(t)$ и измеряемого выхода $y(t)$) генерировала бы в каждый текущий момент времени t оценку $\hat{x}(t)$, "близкую" к истинному значению вектора состояния $x(t)$. Математическое требование "близости" здесь подразумевается в виде $\hat{x}(t) \rightarrow x(t)$ при $t \rightarrow \infty$, т.е., асимптотическое приближение оценки $\hat{x}(t)$ к вектору состояния $x(t)$. Если ввести понятие ошибки оценки вектора состояния $e(t)$ как $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, то последнее требование можно сформулировать и так: $e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Скорость и форма приближения оценки $\hat{x}(t)$ к оригиналу $x(t)$ также имеет немаловажное значение. Условие асимптотического приближения предполагает, что вектор состояния наблюдателя $\hat{x}(t)$ в "установившемся" режиме должен практически повторять поведение вектора состояния объекта $x(t)$.

В качестве математической модели (алгоритма работы) наблюдателя состояния системы (5.1), (5.2) выбирают следующее векторное дифференциальное уравнение [1, 11, 12, 13]

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A \cdot \hat{x}(t) + B \cdot u(t) + L \cdot [y(t) - C \cdot \hat{x}(t)], \quad (5.8)$$

где L – матрица коэффициентов усиления наблюдателя, которую требуется выбирать из условий, предъявляемых к наблюдателю.

Для запуска алгоритма (5.8) следует задаться начальным условием для вектора-оценки $\hat{x}(0) = \hat{x}_0$. Если известно начальное состояние объекта управления x_0 , то выбрав $\hat{x}_0 = x_0$, из (5.8) мы получим идеальный наблюдатель — $\hat{x}(t) = x(t)$, $\forall t \geq 0$. Однако, обычно, начальное состояние объекта управления x_0 неизвестно, тогда для запуска наблюдателя (5.8) в качестве его начального условия выбирают произвольный вектор $\hat{x}_0$, например, нулевой. В этом случае начальное значение ошибки оценки $e(0) = x_0 - \hat{x}_0 \neq 0$ и назначение наблюдателя (5.8) состоит в том, чтобы со временем свести эту ошибку к нулю $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

Уравнение для ошибки оценки $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ можно получить вычитанием (5.8) из (5.1) и, с учётом выражения для уравнения выходов (5.2) и выражения для ошибки оценки $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, получим

$$\frac{de(t)}{dt} = [A - L \cdot C]e(t).$$

Из последнего дифференциального уравнения (в силу его однородности) следует, что требование асимптотического стремления ошибки к нулю ($e(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$) при любом её начальном значении $e(0)$ обеспечивается исключитель-

но спектром (множеством собственных чисел) матрицы динамики наблюдателя $A-L \cdot C$. Если эта матрица будет гурвицевой (асимптотически устойчивой, т.е., все её собственные числа будут иметь строго отрицательные вещественные части), то стремление ошибки оценки $e(t)$ к нулю будет обеспечено. Скорость и форма стремления ошибки оценки $e(t)$ к нулю обусловлена соответствующим расположением собственных чисел матрицы $A-L \cdot C$ в левой полуплоскости – большая скорость стремления ошибки оценки к нулю определяется более далёким положением собственных чисел от мнимой оси слева, а форма стремления ошибки к нулю определяется как кратностью собственных значений матрицы $A-L \cdot C$, так и наличием среди них комплексно-сопряженных пар чисел.

Требования асимптотической устойчивости и необходимой динамики наблюдателя (5.8) могут быть удовлетворены только соответствующим выбором значений матрицы L , т.к. матрицы A и C заданы как неизменяемые параметры (коэффициенты) модели объекта управления (5.1, 5.2). Известно [11, 12], что, если система (5.1), (5.2) *полностью наблюдаема*, то выбором вещественно-значной матрицы L можно обеспечить матрице наблюдателя $A-L \cdot C$ любой желаемый спектр (с учётом необходимой сопряжённой парности каждого назначаемого комплексного собственного числа).

Известны несколько алгоритмов получения требуемой матрицы L по заданному (желаемому) спектру матрицы наблюдателя $A-L \cdot C$. Так как собственные числа матриц называют ещё и *модами*, то синтезируемые по таким алгоритмам наблюдатели называют *модальными* наблюдателями. Если наблюдатель синтезируется для восстановления всего вектора состояния, то он называется наблюдателем *полного порядка*, иначе – наблюдателем *пониженного порядка* или наблюдателем *Люенбергера* [12].

5.3 Объект исследования

Объектами исследования остаются две известных (см. указания к лабораторной работе №1) линейных модели слабозмущённого движения летательного аппарата (ЛА) для продольного и бокового движений:

- линейная модель движения ЛА в вертикальной плоскости (продольное движение – *longitudinal motion*) – уравнения (1.3), (1.6), (1.8). Управляющим входным сигналом здесь является угол отклонения руля высоты δ_δ . Управляемым выходом – отклонение угла тангажа ϑ ;

- линейная модель движения ЛА в горизонтальной плоскости с учётом крена (боковое движение – *lateral motion*) – уравнения (1.4), (1.7), (1.9). Управлениями выбраны углы отклонения руля направления δ_η и элеронов δ_ξ , а управляемым выходом – вектор $\begin{bmatrix} \psi \\ \gamma \end{bmatrix}$, где ψ и γ – отклонения углов курса (рыскания) и крена.

В условиях неполных измерений текущих значений переменных состояния $x(t)$, линейно-квадратические регуляторы формируют управляющие сигналы $[\delta_\delta(t)]$ и $[\delta_\eta(t) \ \delta_\xi(t)]^T$ по линейным законам в форме (5.7):

– для продольного движения (*longitudinal motion*) –

$$\delta_e(t) = -K_{long} \cdot \hat{x}_{long}(t), \quad (5.9)$$

где $\hat{x}_{long} = [\hat{\theta} \quad \hat{\vartheta} \quad \hat{\omega}_z \quad \hat{h}]^T$ – вектор-функция состояния модели продольного движения ЛА;

K_{long} – матрица-строка оптимальных коэффициентов усиления отрицательной обратной связи;

– для бокового движения (*lateral motion*) –

$$\begin{bmatrix} \delta_n(t) \\ \delta_y(t) \end{bmatrix} = -K_{lat} \cdot \hat{x}_{lat}(t), \quad (5.10)$$

где $\hat{x}_{lat}(t) = [\hat{\psi} \quad \hat{\omega}_y \quad \hat{\gamma} \quad \hat{\omega}_x \quad \hat{\beta}]^T$ – вектор-функция состояния модели бокового движения ЛА;

K_{lat} – матрица из двух строк с оптимальными коэффициентами усиления отрицательной обратной связи.

Таким образом, в случае измерения только вектора управляемого выхода $y(t)$, реализация ЛКР выхода производится на основе выражения

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t), \quad (5.7)$$

где n -вектор $\hat{x}(t)$ представляет собой оценку вектора состояния объекта управления, вырабатываемую модальным наблюдателем (5.8), а матрица оптимальных коэффициентов K определяется на основе выражений (5.4) и (5.5).

5.4 Необходимые сведения из Matlab

Формирование линейного стационарного динамического объекта (ЛТИ-объекта) в форме модели в пространстве состояний (5.1), (5.2) осуществляется функцией **ss**

$$\text{sys} = \text{ss}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$$

Проверка свойств управляемости и наблюдаемости ЛТИ-объекта производится функциями **ctrb**, **obsv**, **rank**

$$\text{rank}(\text{ctrb}(\mathbf{A}, \mathbf{B})) \quad \text{и} \quad \text{rank}(\text{obsv}(\mathbf{A}, \mathbf{C}))$$

Функция **lqry** осуществляет формирование линейно-квадратичного регулятора выхода в задаче (5.1), (5.2), (5.3) –

$$[\mathbf{K}, \mathbf{S}, \mathbf{E}] = \text{lqry}(\text{sys}, \mathbf{M}, \mathbf{R})$$

Функция возвращает матрицу коэффициентов оптимальной обратной связи $\mathbf{K}$ (5.5); решение уравнения Риккати в виде матрицы $\mathbf{S}$ из (5.4); вектор $\mathbf{E}$ собственных значений матрицы динамических коэффициентов оптимальной системы $\mathbf{A}-\mathbf{B} \cdot \mathbf{K}$ (5.6).

Модальные наблюдатели полного порядка синтезируются с помощью функций **acker** или **place**. Формально эти функции предназначены для синтеза *модальных регуляторов*, однако в силу двойственности свойств управляемости и наблюдаемости для линейных систем, они могут быть использованы и для синтеза наблюдателей полного порядка [13, 15].

Функция **acker** используется только в случае *одномерного (скалярного) выхода* объекта, а функция **place** – для произвольной размерности вектора выхода объекта. Однако, в любом случае, применение данных функций возможно только при полной наблюдаемости объекта.

Перед использованием функций **acker** или **place** необходимо задать числовой вектор **P**, состоящий из набора желаемых собственных чисел матрицы динамики наблюдателя **A-L·C**. Этот вектор должен содержать n чисел (n – порядок математической модели объекта). Следует также учесть, что задаваемое проектировщиком в **P** комплексное собственное число **z** должны обязательно идти в паре со своим комплексно-сопряжённым числом **z***.

Вызов функций **acker** или **place** для синтеза модальных наблюдателей осуществляется командами

$$\mathbf{L} = \text{acker}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{P})' \quad \text{или} \quad \mathbf{L} = \text{place}(\mathbf{A}', \mathbf{C}', \mathbf{P})'$$

Здесь символ "'" (апостроф) обозначает операцию транспонирования, а идентификатор **L** – искомую матрицу усиления наблюдателя (5.8).

5.5 Задание на работу

С помощью функций среды Matlab провести анализ условий существования решения задачи синтеза оптимальной системы стабилизации выхода объекта управления. Для этого создать **m**-файл, в котором выполняются следующие действия:

а) ввести параметры линеаризованной системы в виде модели пространства состояний (5.1), (5.2). Задать матрицы **A**, **B** и **C**, а затем воспользоваться функцией **ss** (при этом матрицу **D** принять равной нулевой);

б) ввести единичные матрицы весовых коэффициентов **M** и **R**. Проверить условия управляемости пары (**A**, **B**) и наблюдаемости пары (**A**, **C**);

в) решить задачу синтеза оптимальной системы стабилизации выходом $y(t)$ объекта управления и провести моделирование оптимальной САУ:

1) определить матрицы коэффициентов **K** статических обратных связей, обеспечивающих минимальное значение функционала (5.3) для заданных единичными весовых матриц **M** и **R**;

2) построить график собственного движения оптимальной системы стабилизации для выбранных начальных условий x_0 ;

3) построить график оптимального управления $u(t) = -K \cdot x(t)$;

г) провести синтез модального наблюдателя полного порядка (5.8) для получения вектора-оценки состояния объекта управления (5.1):

- 1) задать вектор из n желаемых собственных чисел матрицы $A-L \cdot C$ динамики наблюдателя полного порядка. Собственные числа должны иметь отрицательные вещественные части и обеспечивать наблюдателю лучшую динамику, чем динамика объекта управления;
- 2) с помощью соответствующей функции библиотеки Control System Toolbox получить матрицу коэффициентов усиления наблюдателя L ;
- д) составить структуру оптимальной системы стабилизации с наблюдателем (рисунок 5.1). На основе этой структуры создать Simulink-схему моделирования оптимальной САУ с наблюдателем [16, 17];



Рисунок 5.1 – Структурная схема оптимальной САУ с наблюдателем состояния

- е) провести моделирование в Simulink поведения оптимальной системы с наблюдателем и сравнить графики управляемых переменных и стабилизирующих управлений с аналогичными графиками из пунктов В₂) и В₃);

ж) провести исследование влияния динамических свойств наблюдателя на качество оптимальных процессов системы стабилизации. Различия в динамике наблюдателей формировать соответствующим выбором собственных чисел (см. пункт Г₁)). Исследование провести на основе результатов моделирования в Simulink;

з) провести исследование влияния начального состояния наблюдателя $\hat{x}_0$ на качество оптимальных процессов системы стабилизации. Исследование провести на основе результатов моделирования в Simulink [16, 17].

5.6 Содержание отчёта и порядок защиты работы

По результатам проведённых исследований необходимо составить отчёт, который должен содержать:

- цель работы;
- необходимые сведения из теории с приведением и описанием основных математических соотношений, относящихся к постановке и решению задач синтеза оптимального регулятора выхода и модального наблюдателя состояния полного порядка;
- текст Matlab-программы (**m**-файла), реализующей необходимые расчёты и построения процессов в оптимальной системе стабилизации выхода без модального наблюдателя и с модальным наблюдателем;
- графики собственных движений и управлений оптимальной системы стабилизации входа с/без модального наблюдателя;

- структуру оптимальной САУ с модальным наблюдателем, её Simulink-схему и результаты моделирования в виде графиков выходов;
- общие выводы о проделанной работе.

5.7 Контрольные вопросы

1. Сформулируйте в развёрнутом виде постановку общей линейно-квадратической задачи управления выходом ЛТИ-объекта на бесконечном интервале времени?
2. Поясните необходимость выполнения свойства полной управляемости ЛТИ-объекта в данной задаче.
3. Поясните необходимость выполнения свойства полной наблюдаемости ЛТИ-объекта в данной задаче.
4. Каким требованиям должны удовлетворять ЛТИ-объект управления и квадратичный критерий качества, чтобы существовало решение задачи ЛКО?
5. Какие математические функции Matlab и для каких целей могут быть использованы при решении стационарной задачи ЛКО?
6. Поясните структуру Simulink-схемы оптимальной САУ, назначение и конкретные значения параметров каждого блока этой схемы.
7. Поясните структуру уравнения (5.8), определяющего алгоритм работы модального наблюдателя.
8. Прокомментируйте подробно процедуру получения матрицы L для наблюдателя (5.8).
9. Объясните влияния начальных условий наблюдателя $\hat{x}_0$ на качество оценки состояния $x(t)$ объекта управления.
10. По результатам исследований поясните, на качественном уровне, влияние динамики наблюдателя на качество оптимального процесса.

6 ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6. ИССЛЕДОВАНИЕ САУ С ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧЕСКИМ СТОХАСТИЧЕСКИМ РЕГУЛЯТОРОМ

6.1 Цель работы

Исследование систем управления с линейно-квадратическим стохастическим регулятором. Синтез оптимального наблюдателя состояния.

6.2 Краткие теоретические сведения

Задача синтеза оптимального стохастического регулятора

Рассматривается задача синтеза линейно-квадратического регулятора в условиях, когда на объект управления действуют случайные возмущения, а измерению доступен лишь зашумленный вектор из линейных комбинаций компонентов состояния. Предполагается, что все шумы являются белыми и нормальными (гауссовыми). Поэтому эта задача получила в литературе название задачи синтеза линейно-квадратического гауссова (ЛКГ) регулятора, а сам регулятор – ЛКГ-регулятор или LQG-регулятор.

Математическую постановку задачи синтеза ЛКГ-регулятора определим следующими соотношениями:

– математическая модель объекта управления – уравнение состояния –

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t), \quad t \geq t_0, \quad x(t_0) = x_0, \quad (6.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния системы;

$u \in \mathbb{R}^m$ – вектор управления;

$w \in \mathbb{R}^q$ – стационарный центрированный гауссов белый шум с неотрицательно определённой матрицей интенсивности $M\{ww^T\} = W$, где $W \geq 0$;

x_0 – гауссов случайный вектор начального состояния со средним значением $\bar{x}_0 = M\{x_0\}$ и матрицей ковариаций $P_0 = M\{(x - \bar{x}_0)(x - \bar{x}_0)^T\}$;

– уравнение измеряемого выхода –

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + v(t), \quad (6.2)$$

где $y \in \mathbb{R}^p$ – вектор измеряемых выходов системы;

$v \in \mathbb{R}^p$ – стационарный центрированный гауссов белый шум измерений с положительно определённой матрицей интенсивности $M\{vv^T\} = V > 0$, некоррелированный с шумом w и вектором x_0 ;

– уравнение управляемого выхода –

$$z(t) = Ex(t), \quad (6.3)$$

где $z \in \mathbb{R}^r$ – вектор управляемого (регулируемого) выхода;

– квадратический критерий (функционал) качества управления –

$$J = M \left\{ \int_0^\infty [z^T(t)Nz(t) + u^T(t)Ru(t)] dt \right\} \rightarrow \min_{u \in \mathbb{R}^m}, \quad (6.4)$$

где N и R – симметрические неотрицательно и положительно определенные матрицы, соответственно;

M – символ M означает операцию вычисления математического ожидания.

Решение задачи (6.1) ÷ (6.4) формулируется в форме теоремы разделения [1, 4, 11, 13], суть которой состоит в том, что оптимальное управление $u(t)$, доставляющее минимум критерию (6.4), определяется следующим выражением:

$$u(t) = -K \cdot \hat{x}(t), \quad (6.5)$$

где $K = R^{-1}B^T S$ – числовая $m \times n$ –матрица коэффициентов оптимальной обратной связи по состоянию $x(t)$;

S – числовая симметрическая $n \times n$ –матрица, являющаяся решением нелинейного матричного алгебраического уравнения Риккати

$$A^T S + SA + E^T NE - SBR^{-1}B^T S = 0; \quad (6.6)$$

$\hat{x}(t)$ – оптимальная оценка вектора состояния $x(t)$, вырабатываемая оптимальным наблюдателем – фильтром Калмана [1, 4, 11].

Оптимальный стохастический наблюдатель (фильтр Калмана) является линейной стационарной динамической системой вида

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L \cdot [y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)], \quad t \geq t_0, \quad \hat{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad (6.7)$$

которая генерирует, в реальном времени, *несмещённую* оценку $\hat{x}(t)$ вектора состояния $x(t)$, причём такую, которая доставляет минимум квадратическому критерию качества оценивания, построенную на ошибке оценки $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$

$$J = M \left\{ (x(t) - \hat{x}(t))^T (x(t) - \hat{x}(t)) \right\}. \quad (6.8)$$

Для построения фильтра (6.7) необходимо рассчитать значение матрицы ковариаций ошибки оценивания $P = M \left\{ (x - \hat{x})(x - \hat{x})^T \right\}$, являющейся решением матричного нелинейного алгебраического уравнения Риккати

$$PA^T + AP - PC^T V^{-1} CP + W = 0. \quad (6.9)$$

Оптимальная матрица коэффициентов усиления L фильтра (6.7) определяется выражением

$$L = PC^T V^{-1}. \quad (6.10)$$

6.3 Объект управления

В качестве объектов управления выберем снова две линейных модели летательного аппарата (ЛА) для продольного и бокового движений:

– линейная модель движения ЛА в вертикальной плоскости (продольное движение – *longitudinal motion*)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta \\ \vartheta \\ \omega_z \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.86 & 0.86 & 0 & 0.61 \cdot 10^{-3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4.85 & -4.85 & -0.777 & 0.12 \cdot 10^{-4} \\ 257 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \vartheta \\ \omega_z \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0268 \\ 0 \\ -1.625 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [\delta_\epsilon] + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (6.11)$$

здесь θ – угол наклона траектории, ϑ – угол тангажа, ω_z – угловая скорость тангажа, h – отклонение по высоте полёта, δ_ϵ – угол отклонения руля высоты;

– линейная модель движения ЛА в горизонтальной плоскости с учётом крена (боковое движение – *lateral motion*)

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \psi \\ \omega_y \\ \gamma \\ \omega_x \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.098 & 0 & 0.038 & -0.75 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -0.089 & 0 & -1.52 & -3.4 \\ 0 & 1 & 0.38 & 0.11 & -0.09 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi \\ \omega_y \\ \gamma \\ \omega_x \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -0.63 & 0.16 \\ 0 & 0 \\ 0.9 & -2.3 \\ -0.016 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_\eta \\ \delta_\zeta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

здесь ψ – угол курса (рыскания), γ – угол крена, β – угол скольжения, ω_y и ω_x – угловые скорости рыскания и крена, δ_η и δ_ζ – углы отклонения руля направления и элеронов.

Предполагается, что для модели (6.11) возмущениям подвержены компоненты состояния ϑ – угол тангажа и h – отклонение по высоте полёта. Для модели (6.12) – соответственно γ – угол крена и β – угол скольжения.

Будем считать, что в задаче стабилизации ЛА в вертикальной плоскости (продольное движение) измеряемой переменной и выходной управляемой переменной y_{long} является одна и та же переменная – отклонение угла тангажа ϑ от балансирующего значения, тогда уравнение выходов (6.2) для этого случая имеет следующий вид

$$y_{long}(t) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} \theta \\ \vartheta \\ \omega_z \\ h \end{bmatrix} + v(t) = \vartheta(t) + v(t). \quad (6.13)$$

Уравнение состояния (6.11) и выходов (6.13) формируют математическую модель продольного движения ЛА как управляемого объекта, имеющего один управляющий вход $\delta_\epsilon(t)$ и один управляемый выход $\vartheta(t)$ – SISO-объект (Single-Input Single-Output).

Для модели бокового движения (6.12) измеряемыми переменными и управляемыми переменными выберем одни и те же переменные – угол рыскания ψ и угол крена γ , тогда уравнение выходов (вектор выходов y_{lat}) будет иметь вид

$$y_{lat}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi \\ \omega_y \\ \gamma \\ \omega_x \\ \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \gamma(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

Уравнение состояния (6.12) и выходов (6.14) формируют математическую модель бокового движения ЛА как управляемого объекта, имеющего два управляющих входа и (δ_n, δ_s) и два управляемых выхода (ψ, γ) – МИМО-объект (Multiple-Input Multiple-Output).

В соответствии с приведённым выше описанием объекта управления и поставленной задачи оптимального управления, следует ещё раз обратить внимание на то, что здесь матрица уравнения измерений (6.2) C и матрица вектора управляемого выхода (6.3) E – одна и та же матрица, т.е., $C=E$.

6.4 Необходимые сведения из Matlab

Построение фильтра Калмана

Функция **kalman** осуществляет расчёт фильтра Калмана для непрерывных или дискретных систем автоматического управления. При обращении к функции **kalman** в форме

$$[\mathbf{k}est, \mathbf{L}, \mathbf{P}] = \mathbf{kalman}(\mathbf{sys}, \mathbf{W}, \mathbf{V})$$

формируется в виде модели пространства состояния LTI-объект **kest** – фильтр Калмана для объекта **sys**, также заданного в виде модели пространства состояний. Числовые матрицы **L** и **P** определяются из выражений (6.9) и (6.10).

Исходная система **sys** должна быть представлена моделью в виде следующих соотношений:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) & \text{(уравнение состояния),} \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) + Hw(t) + v(t) & \text{(уравнение измерений).} \end{cases} \quad (6.15)$$

Векторы и матрицы модели (6.15) описаны в выражениях (6.1) и (6.2). В уравнении измерений введено дополнительное слагаемое $H \cdot w(t)$, которое позволяет в случае необходимости учитывать влияние шума объекта $w(t)$ в канале измерений.

В соответствии с уравнениями модели объекта (6.15), формирование LTI-объекта **sys** с помощью функции **ss** необходимо проводить таким образом:

$$\mathbf{sys} = \mathbf{ss}(\mathbf{A}, [\mathbf{B} \ \mathbf{G}], \mathbf{C}, [\mathbf{D} \ \mathbf{H}])$$

После отработки функции **kalman**, математическая модель сформированного LTI-объекта **kest** (фильтра Калмана) представляется в виде следующих уравнений:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu + L[y(t) - C\hat{x}(t) - Du], \\ \begin{bmatrix} \hat{y}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{cases} \quad (6.16)$$

или

$$\begin{cases} \frac{d\hat{x}(t)}{dt} = (A - LC)\hat{x}(t) + [B - LD \quad L] \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \hat{y}(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x}(t) + \begin{bmatrix} D & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (6.17)$$

Из вида уравнений модели (6.17) следует, что фильтр **kest** имеет векторный вход $[u, y]^T$, а на выходе генерирует оптимальные оценки вектора измерений $\hat{y}(t)$ и вектора состояния $\hat{x}(t)$.

Формирование массивов случайных чисел

Массив отсчётов, соответствующих белому нормальному центрированному с единичным среднеквадратическим отклонением шуму, в **Matlab** можно сформировать с помощью функции **randn**. Числа, распределённые по нормальному закону можно также формировать с помощью функции **normrnd**. Инструкция **R = normrnd(Mu, Sigma, N, M)** генерирует $N \times M$ -матрицу случайных чисел **R**, распределённых по нормальному закону с заданными математическим ожиданием **Mu** и среднеквадратическим отклонением **Sigma**.

Синтез линейно-квадратического гауссова регулятора

Для формирования оптимального стохастического регулятора предлагается использовать функцию **lqgreg**. Функция **lqgreg** формирует ЛКГ-регулятор при известных коэффициенте усиления оптимальной обратной связи **K** и фильтре Калмана (6.5). Синтаксис функции:

$$\mathbf{rlqg} = \mathbf{lqgreg}(\mathbf{kest}, \mathbf{K})$$

Функция **lqgreg** формирует ЛКГ-регулятор, соединяя фильтр Калмана, предварительно сконструированный при помощи функции **kalman**, со статическим звеном оптимальной обратной связи по вектору состояния, вычисленным при помощи функций **lqr** или **lqry**. Структурная схема оптимальной замкнутой системы изображена на рисунке 6.1.

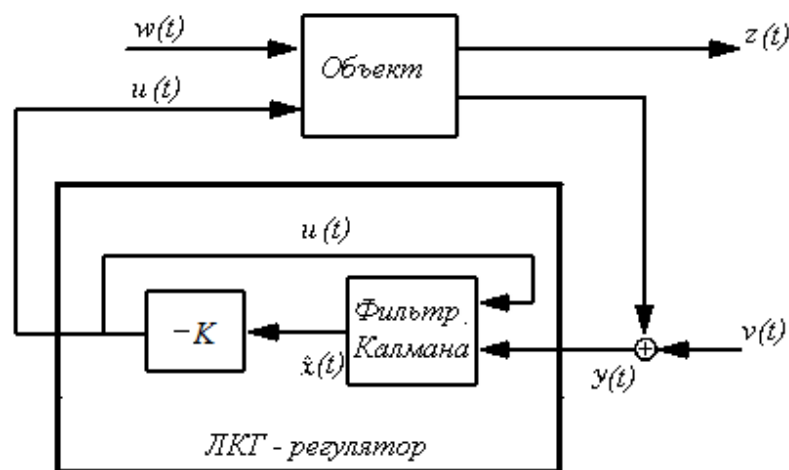


Рисунок 6.1 – Структурная схема замкнутой системы с LQG-регулятором

6.5 Порядок выполнения работы

1. Для формирования исходных данных об исследуемой системе в среде Matlab создать m-файл, в котором следует задать:
 - а) параметры объектов управления – матрицы A , B , C , D , G и H ;
 - б) диагональные матрицы интенсивностей шумов $V=10^{-5} \cdot I$, $W=10^{-4} \cdot I$ и единичные матрицы штрафов критерия качества (6.4) $N=I$ и $R=I$;
 - в) нормально распределённый случайный вектор начального состояния объекта управления x_0 с произвольным (физически обоснованным) математическим ожиданием $\bar{x}_0$ и матрицей ковариаций $P_0 = 10^{-3} \cdot I$.
2. Провести проверку свойств управляемости и наблюдаемости для исследуемого объекта управления.
3. Создать модель объекта управления в форме пространства состояний по уравнениям (6.15).
4. Получить матрицу коэффициентов K отрицательной обратной связи (6.5) с помощью функции **lqgr**.
5. Сформировать оптимальный наблюдатель – фильтра Калмана – с помощью функции **kalman**.
6. Создать ЛКГ-регулятор с помощью функции **lqgreg**.
7. Провести моделирование САУ с ЛКГ-регулятором. Для этого необходимо осуществить следующие предварительные действия:
 - а) задать длительность временного интервала моделирования $t \in [0, t_k]$ (после нескольких итераций, подобрать приемлемое значение t_k);
 - б) осуществить генерацию необходимых массивов случайных значений шумов в объекте $w(t)$ и измерителе $v(t)$. Шумы – белые, нормальные, центрированные, с указанными матрицами интенсивностей W и V (см. п.1б);
 - в) сформировать вектор начального состояния объекта x_0 (см. п.1в);

г) создать модель пространства состояний оптимальной САУ по образцу схемы рисунка 6.1.

8. Создать схему оптимальной САУ в Simulink [16, 17] и провести моделирование. Для генерации псевдослучайных последовательностей, имитирующих шумы в объекте и в измерениях следует использовать блок-источник сигнала **Band-Limited White Noise**.

После выполнения основного задания (пункты 1÷7) – синтеза ЛКГ-регулятора и моделирования поведения оптимальной САУ, следует провести исследование влияния параметров исходной задачи на качественные и количественные характеристики работы оптимальной САУ.

В соответствии с вариантом, необходимо выполнить следующие исследования:

- летательный аппарат (6.11), (6.13) – влияние матриц N и W ;
- летательный аппарат (6.12), (6.14) – влияние матриц R и V .

Изменения значений матриц N и R должны производиться таким образом, чтобы можно было, в первую очередь, оценить их влияние на динамические характеристики оптимальной САУ – быстродействие, перерегулирование, колебательность и т.п. Влияние матриц W и V следует оценивать в контексте точностных характеристик оптимальной САУ. Для получения таких оценок и их численного и визуального сравнения необходимо проводить моделирование оптимальных САУ при одинаковых псевдослучайных последовательностях, имитирующих шумы в объекте и в измерениях.

Результаты моделирования и выводы по проведённым исследованиям должны быть достаточно полно проиллюстрированы в числовом и графическом виде.

6.6 Содержание отчета и порядок защиты работы

По результатам проведённых исследований необходимо составить отчёт, который должен содержать в себе следующие разделы:

- математическую модель динамики объекта управления с пояснениями физического смысла составляющих векторов состояния, измерения и управляемого выхода;
- математическое описание постановки задачи оптимизации и основные соотношения для алгоритмов оптимального управления и оценивания;
- результаты анализа свойств управляемости и наблюдаемости объекта;
- распечатку **m**-файла, реализующего алгоритм оптимального управления и оценивания системы и моделирование поведения оптимальной системы;
- результаты моделирования в числовой и графической формах графиков, согласно выбранному варианту;
- выводы по приведённым исследованиям;
- общие выводы по работе.

6.7 Контрольные вопросы

1. Объясните смысл понятия управляемости объекта и сформулируйте критерий управляемости для стационарной системы.
2. Каким образом осуществляется синтез ЛК-регулятора для детерминированного объекта?
3. Объясните смысл понятия наблюдаемости объекта и сформулируйте критерий наблюдаемости для стационарной системы.
4. Что такое оптимальный стохастический наблюдатель?
5. Каким образом осуществляется оптимальное управление стохастическим объектом?
6. Поясните смысл "теоремы разделения".
7. Какие функции системы Matlab можно использовать для формирования ЛКГ-регулятора?
8. Объяснить с точки зрения физического смысла выбор функционала в форме (6.4).
9. Объясните, когда возникают задачи построения оптимального стохастического наблюдателя, и каково его назначение.
10. Запишите основные уравнения, определяющие фильтр Калмана.
11. Какими свойствами должна обладать система, чтобы для неё можно было построить оптимальный наблюдатель? Дайте определения этих свойств.
12. Дайте определение случайного процесса типа "белый шум".
13. Какие существуют функции системы Matlab, Control System Toolbox, предназначенные для построения фильтра Калмана?
14. Какие существуют функции системы Matlab, Control System Toolbox, предназначенные для моделирования случайных процессов?
15. Когда возникает необходимость синтеза ЛКГ-регулятора, и каково его назначение?
16. Запишите основные уравнения, определяющие ЛКГ-регулятор. Предложите схему его физической реализации.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ким, Д.П. Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы : учебник и практикум для вузов / Д. П. Ким. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 441 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00975-0. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471091> (дата обращения: 07.04.2021).
2. Востриков, А.С. Теория автоматического регулирования: учебник и практикум для вузов / А.С. Востриков, Г.А. Французова. — М.: Изд-во Юрайт, 2021. — 279 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04845-2. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт. — URL: <https://urait.ru/bcode/472193> (дата обращения: 10.07.2021).
3. Математические основы теории автоматического управления: учебное пособие: в 3 томах / В.А. Иванов, В.С. Медведев, Б.К. Чемоданов, А.С. Ющенко. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006 — Том 1 — 2006. — 552 с. — ISBN 5-7038-2808-2. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/106312> (дата обращения: 10.07.2021).
4. Веремей, Е.И. Линейные системы с обратной связью: учебное пособие / Е.И. Веремей. — СПб.: Лань, 2013. — 448 с. — ISBN 978-5-8114-1412-3. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/68465> (дата обращения: 10.07.2021).
5. Крутько П.Д. Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем / П.Д. Крутько, А.И. Максимов, Л.М. Скворцов. — М.: Радио и связь, 1988. — 306 с.
6. Control System Toolbox. Getting Started Guide. R2020a. — The MathWorks, Inc., 2020. — 148 p.
7. Control System Toolbox. User's Guide. R2020a. — The MathWorks, Inc., 2020. — 1440 p.
8. Амос, Г. MATLAB. Теория и практика / Г. Амос; перевод с английского Н.К. Смоленцев. — 5-е изд. — М.: ДМК Пресс, 2016. — 416 с. — ISBN 978-5-97060-183-9. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/82814> (дата обращения: 10.07.2021).
9. Matlab. Mathematics. R2020a. — The MathWorks, Inc., 2020. — 682 p.
10. Matlab. Function Reference. R2020a. — The MathWorks, Inc., 2020. — 14402 p.
11. Квакернаак Х. Линейные оптимальные системы управления / Х. Квакернаак, Р. Сиван. — М.: Наука, 1977. — 650 с.
12. Андреев Ю.Н. Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
13. Карапетьян, В. А. Средства Matlab в задачах анализа и синтеза линейных стационарных САУ: учеб. пособие / В.А. Карапетьян, В.А. Крамарь. — М.: Центркаталог, 2019. — 216 с. — ISBN 978-5-903268-18-4. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/125434> (дата обращения: 08.07.2021).
14. Ostertag E. Mono- and Multivariable Control and Estimation. Linear, Quadratic and LMI Methods / E. Ostertag. — Springer-Verlag, 2011. — 344 p.
15. Кудинов, Ю.И. Теория автоматического управления (с использованием MATLAB — SIMULINK): учебное пособие для вузов / Ю.И. Кудинов, Ф.Ф. Пашенко. — 4-е изд., испр., доп. — СПб.: Лань, 2021. — 308 с. — ISBN 978-5-8114-5520-1. — Текст: электронный // Лань: ЭБС. — URL: <https://e.lanbook.com/book/166342> (дата обращения: 11.07.2021).
16. Symbolic Math Toolbox. User's Guide. R2020a. — The MathWorks, Inc., 2020. — 1804 p.
17. Simulink. User's Guide. R2020a. — The MathWorks, Inc., 2020. — 3496 p.